Clic 71

1AS
ثانوي

محمود مفتاح

# الرياضيات

جذع مشترك
علوم وتكنولوجيا

## الأعداد والحساب $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$

### مدور عدد حقيقي

مثال $5,3194$

| المدور إلى الوحدة | المدور إلى $10^{-1}$ | المدور إلى $10^{-2}$ | المدور إلى $10^{-3}$ |
|---|---|---|---|
| $5$ | $5,3$ | $5,32$ | $5,319$ |

### الأعداد الأولية

نسمي عددا أوليا كل عدد يقبل قاسمين فقط $1$ والعدد نفسه.

### القوى الصحيحة

$a$ و $b$ عددان حقيقيان غير معدومين
$m$ و $n$ عددان صحيحان نسبيان.

- $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ عاملا}}$
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $(a^n)^m = a^{m \times n}$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a.b)^n = a^n . b^n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

## الحساب الجبري

### النشر $k,d,c,b,a$ أعداد حقيقية.

- $k(a+b) = ka + kb$
- $k(a-b) = ka - kb$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

## الكتابة العلمية - رتبة مقدار

مثال

| العدد | شكله العلمي | رتبة مقداره |
|---|---|---|
| $235000$ | $2,35 \times 10^5$ | $2 \times 10^5$ |
| $0,0046$ | $4,6 \times 10^{-3}$ | $5 \times 10^{-3}$ |

## الجذر التربيعي لعدد موجب

**الجذر التربيعي** للعدد الموجب $a$، نرمز له بالرمز $\sqrt{a}$ هو العدد الذي مربعه يساوي $a$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad \sqrt{a} \geq 0$$

### خواص الحساب على الجذور

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان :

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad b \neq 0$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

هام : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

## الجداءات الشهيرة

$a$ و $b$ عددان حقيقيان :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

## عمليات على الكسور

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a\times c}{b\times c}$
- $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a:c}{b:c}$
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\times c}{b\times d}$
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$
- $a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\times c}{d}$
- $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

**ملاحظة :**

يشترط في كل كسر ان يكون مقامه غير معدوم

## الترتيب والمجالات في IR

$a$ و $b$ عددان حقيقيان.

- إذا كان $a \ge b$ فإن $a - b \ge 0$
- إذا كان $a \le b$ فإن $a - b \le 0$

**خواص**

- إذا كان $a \ge b$ و $b \ge c$ فإن $a \ge c$
- إذا كان $a \ge b$ و $c \ge d$ فإن $a+c \ge b+d$
- إذا كان $a \ge b$ فإن $a+c \ge b+c$
- إذا كان $0 < a \le b$ فإن $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$
- إذا كان $a \ge b$ و $c < 0$ فإن $ac \le bc$
- إذا كان $a \ge b$ و $c > 0$ فإن $ac \ge bc$
- إذا كان $a \le b < 0$ فإن $a^2 \ge b^2$
- إذا كان $0 < a \le b$ فإن $a^2 \le b^2$
- إذا كان $a$ و $b$ عددان غير معدومين ولهما نفس الإشارة وكان $a \le b$ فإن : $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

## المجالات في IR

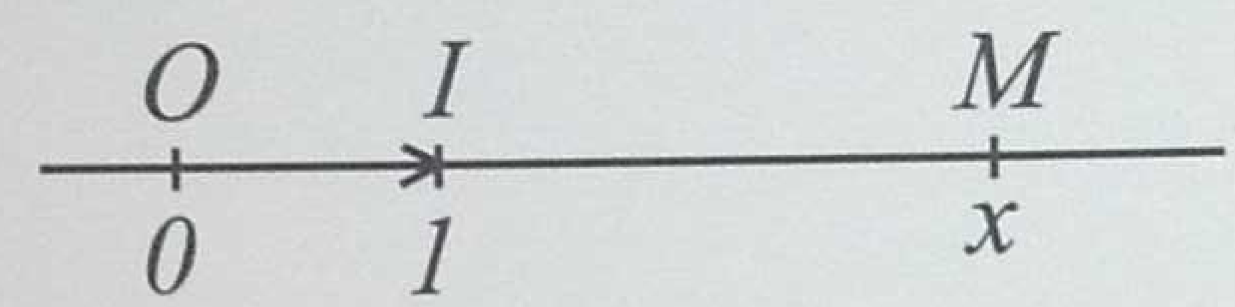
| مجموعة الأعداد الحقيقية $x$ حيث | رمزها | القراءة والتمثيل على المستقيم العددي |
|---|---|---|
| $a \le x \le b$ | $[a;b]$ | المجال مغلق طرفاه $a$ و $b$ |
| $a < x < b$ | $]a;b[$ | المجال مفتوح طرفاه $a$ و $b$ |
| $a < x \le b$ | $]a;b]$ | المجال مفتوح على اليسار طرفاه $a$ و $b$ |
| $a \le x < b$ | $[a;b[$ | المجال مفتوح على اليمين طرفاه $a$ و $b$ |
| $x \ge a$ | $[a;+\infty[$ | المجال $a$ زائد مالا نهاية مغلق في $a$ |
| $x > a$ | $]a;+\infty[$ | المجال $a$ زائد مالا نهاية مفتوح في $a$ |
| $x \le b$ | $]-\infty;b]$ | المجال ناقص مالا نهاية $b$ مغلق في $b$ |
| $x < b$ | $]-\infty;b[$ | المجال ناقص مالا نهاية $b$ مفتوح في $b$ |

## $x$ | القيمة المطلقة

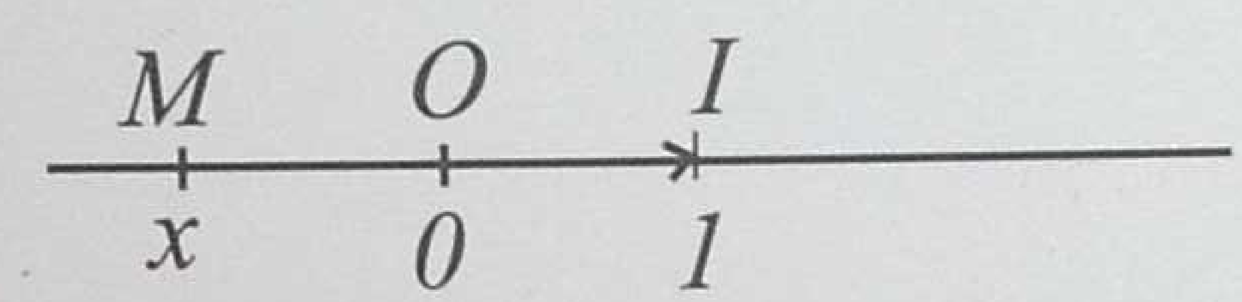
$x$ عدد حقيقي $M$ نقطة من مستقيم مزود بمعلم $(O, I)$ فاصلتها $x$ :

القيمة المطلقة للعدد $x$ هي المسافة $OM$ ونرمز لها بالرمز $|x|$. ونكتب : $OM = |x|$

إذا كان $x \geq 0$ فإن $|x| = x$



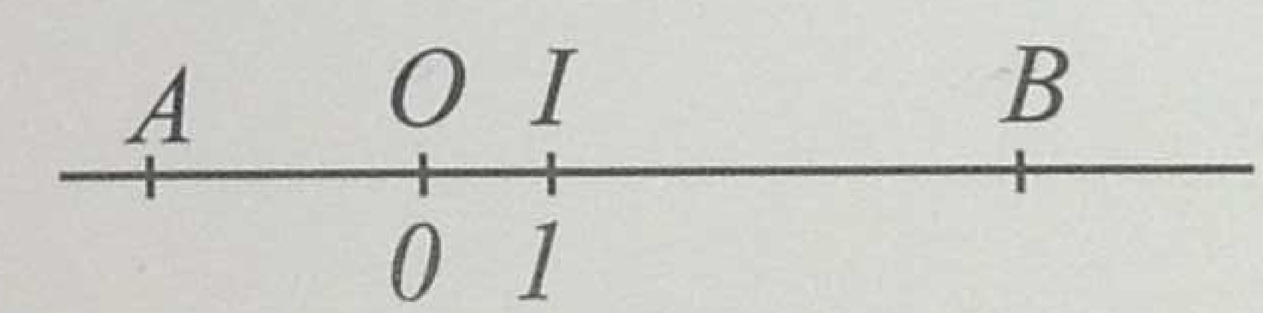

إذا كان $x \leq 0$ فإن $|x| = -x$




## المسافة بين نقطتين

إذا كانت $A$ و $B$ نقطتان فاصلتاهما $a$ و $b$ على الترتيب من المعلم $(O,I)$ فإن :

$$AB = |a - b| = |b - a|$$




■ القيمة المطلقة - المسافة
المجال والحصر

### مبرهنة

$c$ عدد حقيقي و $r$ عدد حقيقي موجب.

من أجل العدد الحقيقي $x$،

$x \in [c-r\,,\, c+r]$ يعني $|x - c| \leq r$

## خواص القيمة المطلقة

$x$ و $y$ عددان حقيقيان و $a \in \mathbb{R}^+$

- $|x| \geq 0$
- $|x| \geq x$
- $|x| \geq -x$
- $|x| = |-x|$
- $|x^2| = |x|^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

■ $|x| = 0$ يكافئ $x = 0$

■ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$

■ $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$

- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$

- $|x| \leq a$ يكافئ $-a \leq x \leq a$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية)

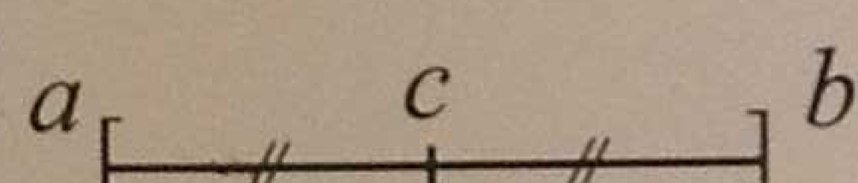
### عناصر المجال

عناصر المجال $[a,b]$ هي :

■ المركز : $c = \dfrac{a+b}{2}$

■ طوله : $\ell = b - a$

■ نصف قطره : $r = \dfrac{\ell}{2}$




### نتائج

$c$ عدد حقيقي و $r$ عدد حقيقي موجب.

من أجل كل عدد حقيقي $x$، النصوص التالية متكافئة :

- $x \in [c-r\,,\, c+r]$ على شكل مجال
- $c - r \leq x \leq c + r$ على شكل حصر
- $d(c,x) \leq r$ على شكل مسافة
- $|x - c| \leq r$ على شكل قيمة مطلقة

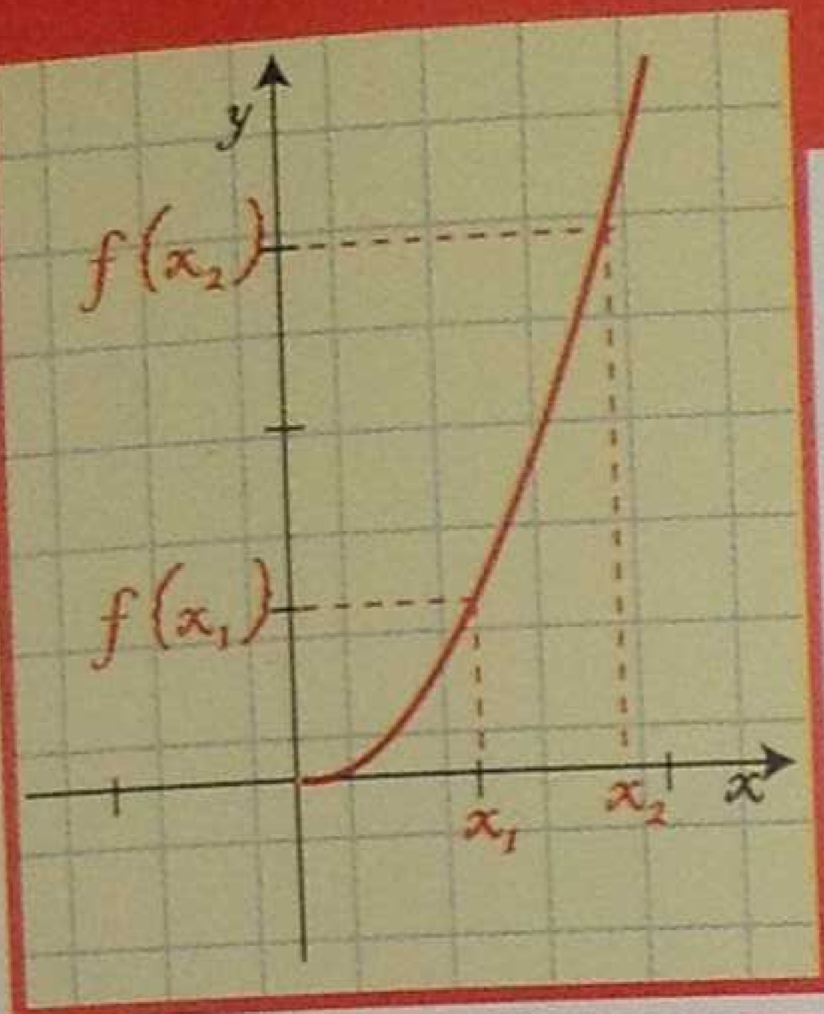
# عموميات على الدوال

## ■ تغيرات دالة

ليكن $D$ جزء من $\mathbb{R}$

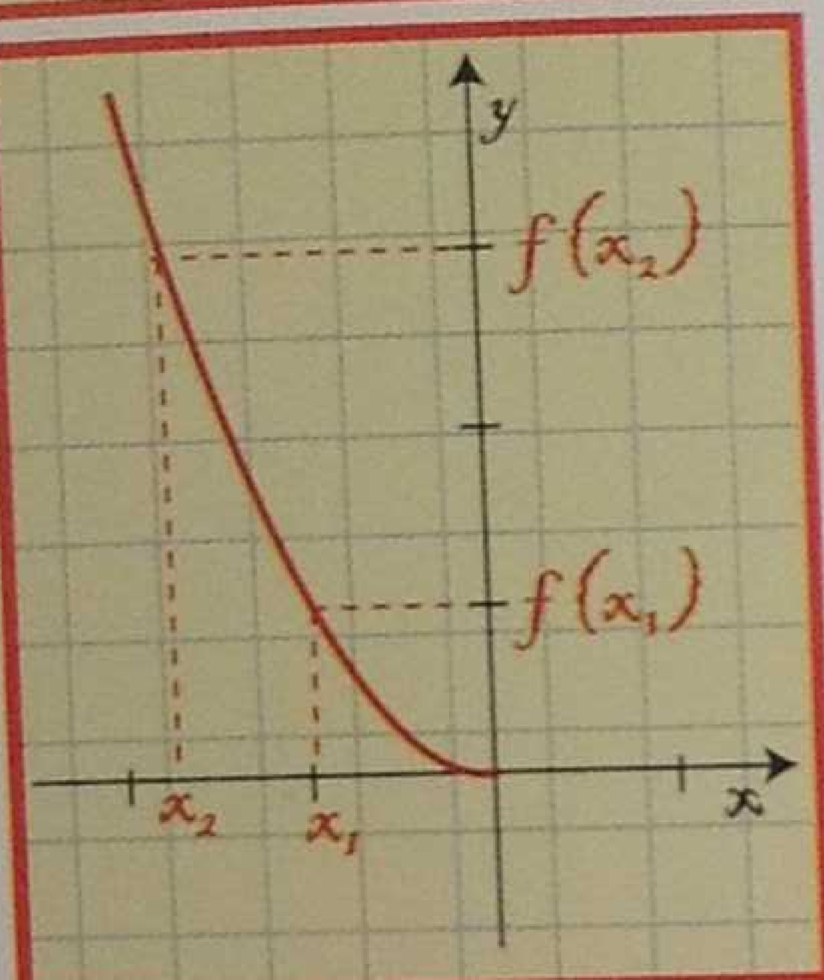
■ $f$ دالة **متزايدة تماما** على $D$ معناه من أجل كل $x_1$ و $x_2$ من $D$:

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن : $f(x_1) < f(x_2)$




■ $f$ دالة **متناقصة تماما** على $D$ معناه من أجل كل $x_1$ و $x_2$ من $D$:

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن : $f(x_1) > f(x_2)$




■ $f$ دالة **ثابتة** على $D$ معناه من أجل كل $x_1$ و $x_2$ من $D$:

$f(x_1) = f(x_2)$

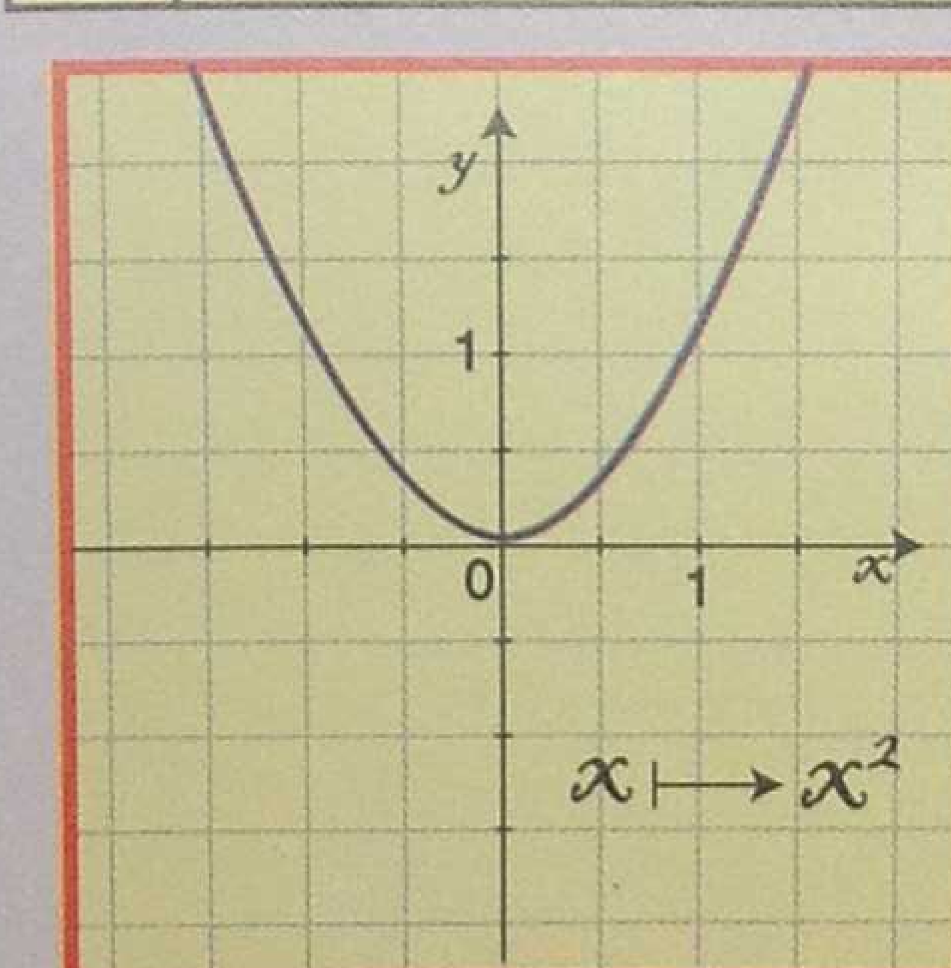
## الدوال المرجعية

### ● الدالة مربع

هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي $x$ مربعه $x^2$ .

الدالة مربع متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

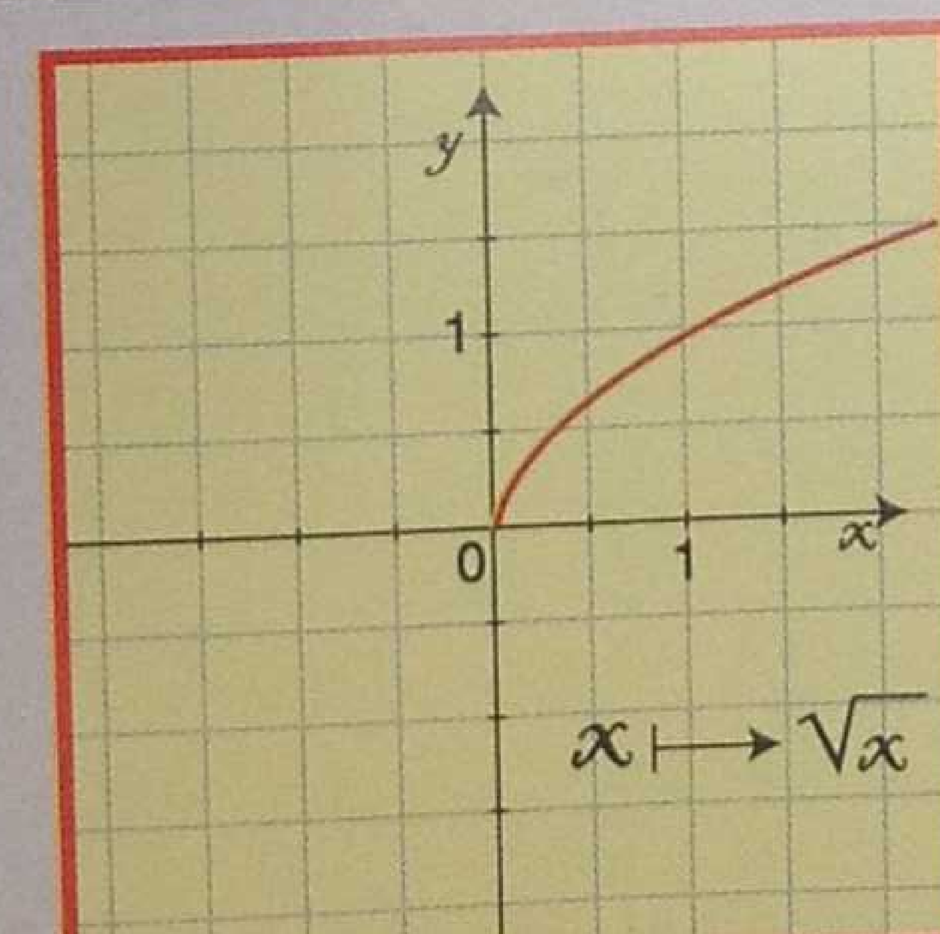



### ● دالة الجذر التربيعي

هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب $x$ جذره التربيعي

دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

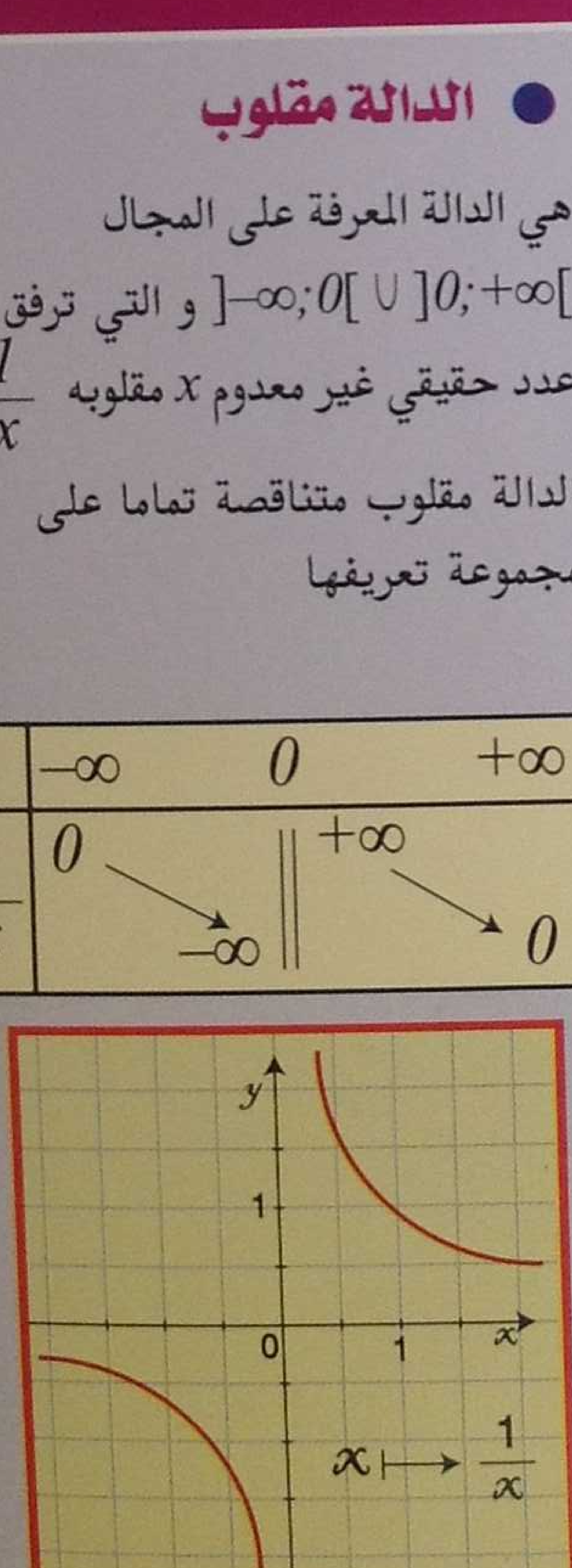



### ● الدالة مقلوب

هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي غير معدوم $x$ مقلوبه $\frac{1}{x}$

الدالة مقلوب متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $0$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ $0$ |



## شفعية دالة

ليكن $D$ جزء من $IR$

- نقول أن $f$ دالة **زوجية** إذا وفقط إذا كان :

$D$ متناظرا بالنسبة إلى $o$ و من أجل كل $x$ من $D$

$$f(-x) = f(x)$$

**التفسير البياني** : التمثيل البياني للدالة $f$ متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

- نقول أن $f$ دالة **فردية** إذا وفقط إذا كان :

$D$ متناظرا بالنسبة إلى $o$ و من أجل كل $x$ من $D$

$$f(-x) = -f(x)$$

**التفسير البياني** : التمثيل البياني للدالة $f$ متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم $O$.

### الدالة الخطية $x \to ax$

$a$ هو معامل توجيه الدالة الخطية و $ax$ هي صورة $x$

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

إذا كان $a < 0$ فإن الدالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

### الدالة التآلفية $x \to ax+b$

هي الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي $x$ العدد $ax+b$

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

إذا كان $a < 0$ فإن الدالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

- التمثيل البياني للدالة التآلفية هو مستقيم معامل توجيهه $a$
- النقطة $A(0,b)$ تسمى الترتيب عند المبدأ.

## كثير الحدود من الدرجة الثانية

### الشكل النموذجي لثلاثي الحدود

$$f(x) = a x^2 + b x + c \quad \text{مع} \quad a \neq 0$$

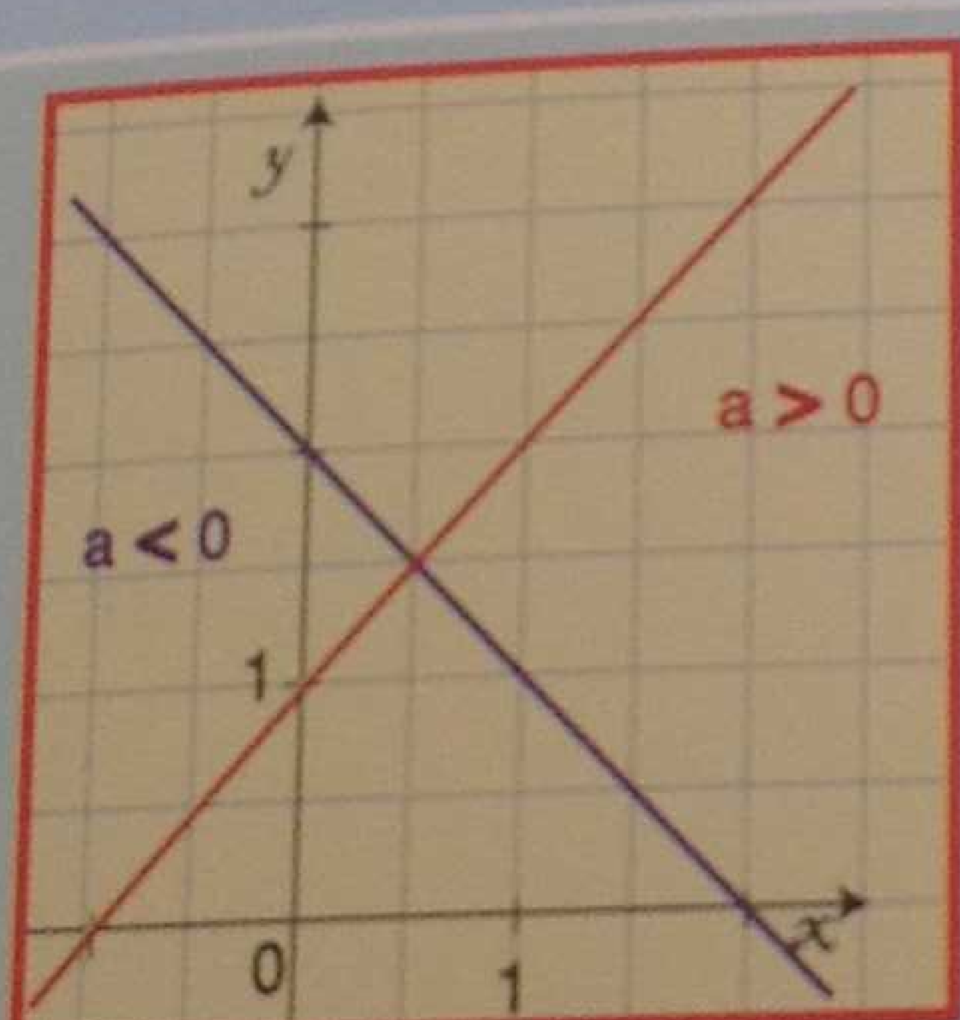
$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$$

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

نسمي $\Delta$ المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

| إشارة $\Delta$ | الجذران | التحليل |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $a(x-x_1)(x-x_2)$ |
| $\Delta = 0$ | $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ | $a(x - x_1)^2$ |
| $\Delta < 0$ | لا توجد جذور | غير قابل للتحليل |




## حساب المثلثات


$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

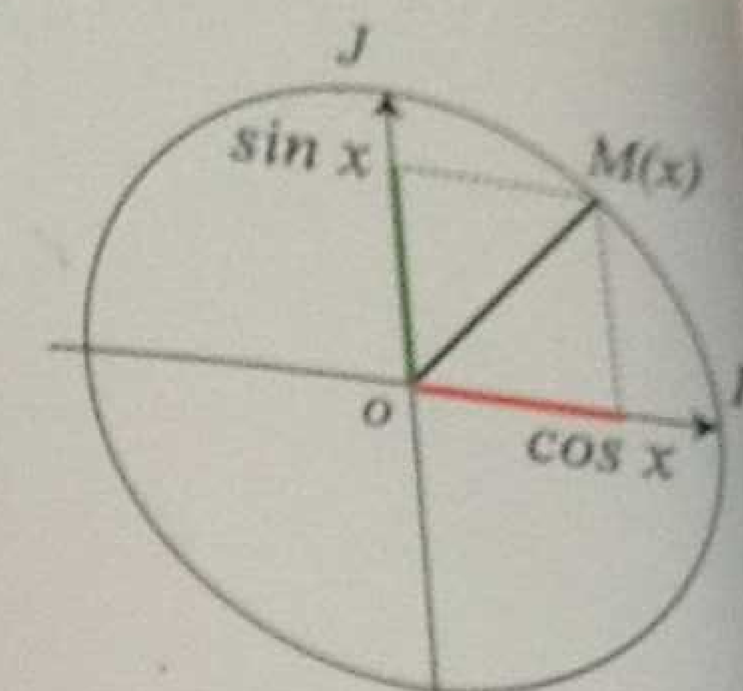
### الزوايا الشهيرة

| $x$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
|---|---|---|
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $1$ |

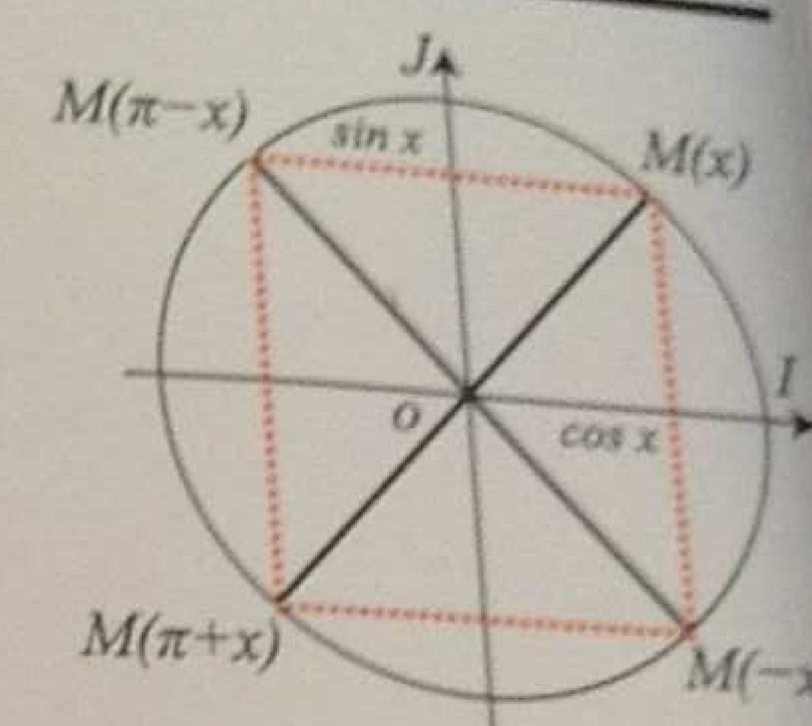
| $x$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

من أجل كل عدد حقيقي $x$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$




- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ,
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ , $k \in Z$




### نظرية فيثاغورس

إذا كان $ABC$ مثلثا قائما في $A$ فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

تفيد نظرية فيثاغورس في حساب الأطوال

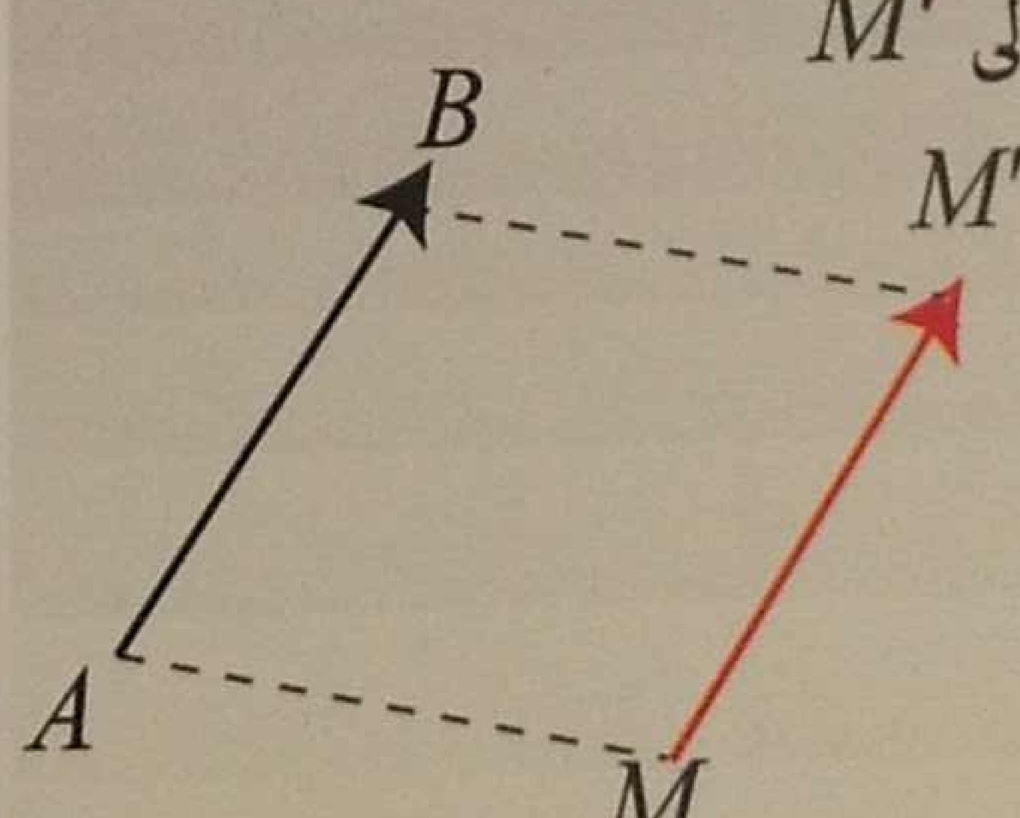
### عكس نظرية فيثاغورس

إذا كان $ABC$ مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن $ABC$ قائم في $A$.

تفيد عكس نظرية فيثاغورس في إثبات أن المثلث قائم.

## الإنسحاب

- النقطة $M'$ صورة النقطة $M$ بالإنسحاب الذي يحول النقطة $A$ إلى $B$ يعني أن $ABM'M$ متوازي أضلاع.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ يعني أن الإنسحاب الذي يحول النقطة $A$ إلى $B$ يحول كذلك النقطة M إلى $M'$

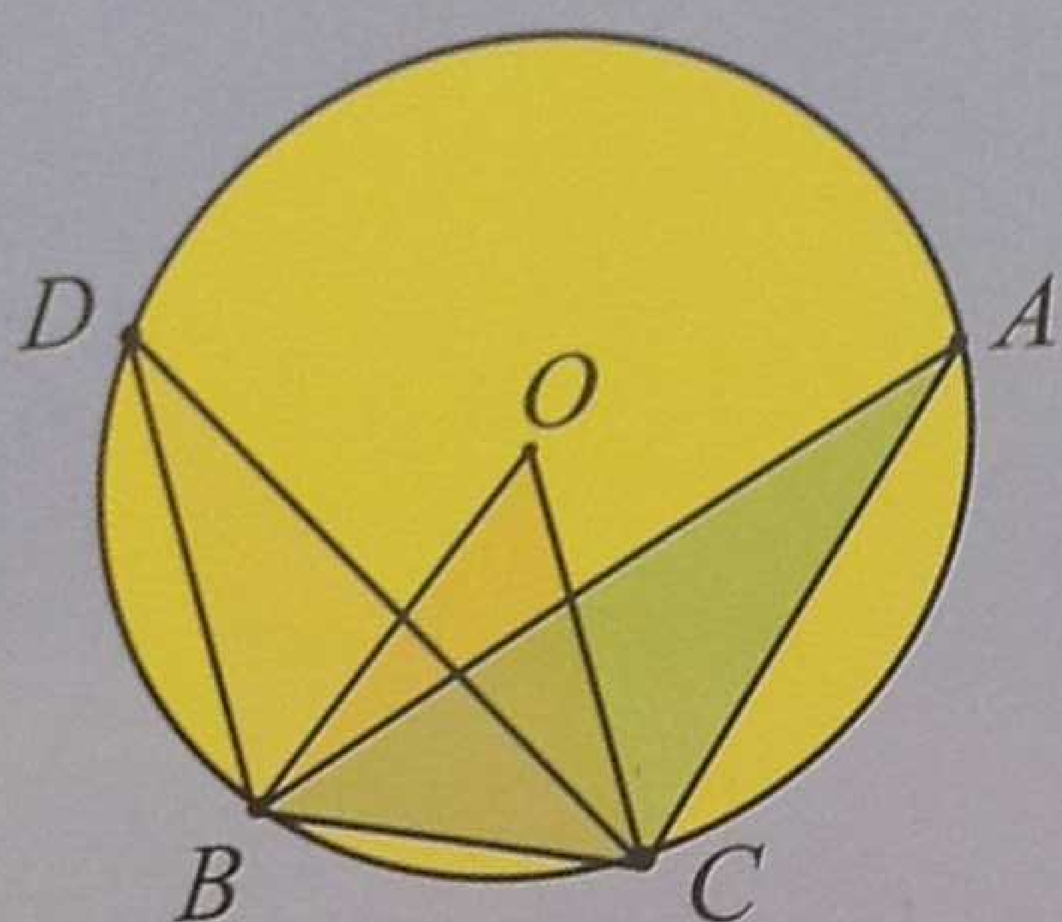



### خواص

- الإنسحاب يحافظ على الإستقامية، المسافات، الزوايا والأشكال.
- صورة مستقيم بانسحاب هي مستقيم يوازيه.

## الزوايا المركزية والمحيطية

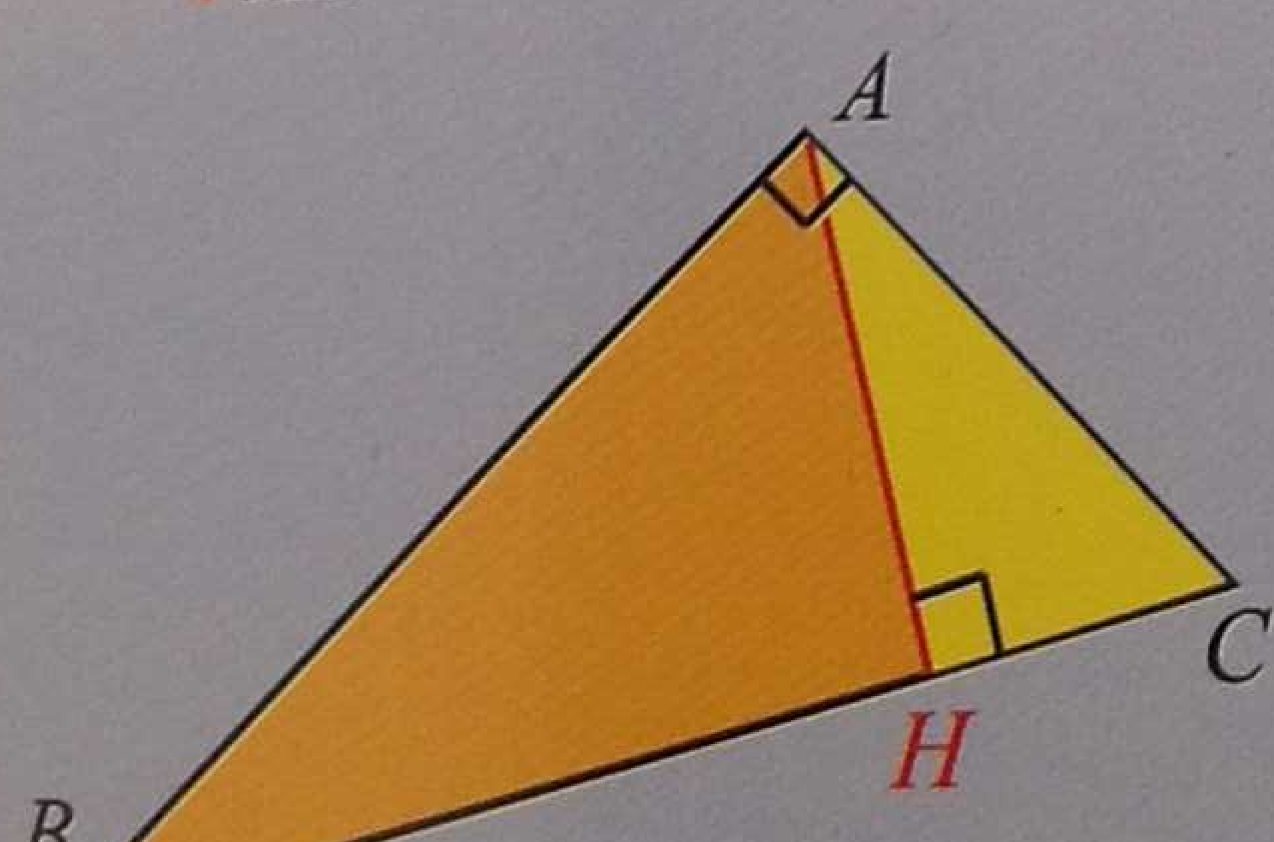
- الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متقايسة
  $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$
- الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية
  $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$
- الرباعي الدائري هو رباعي رؤوسه تقع على نفس الدائرة
- يكون الرباعي دائريا إذا وفقط إذا كانت فيه زاويتين متقابلتين متكاملتين.



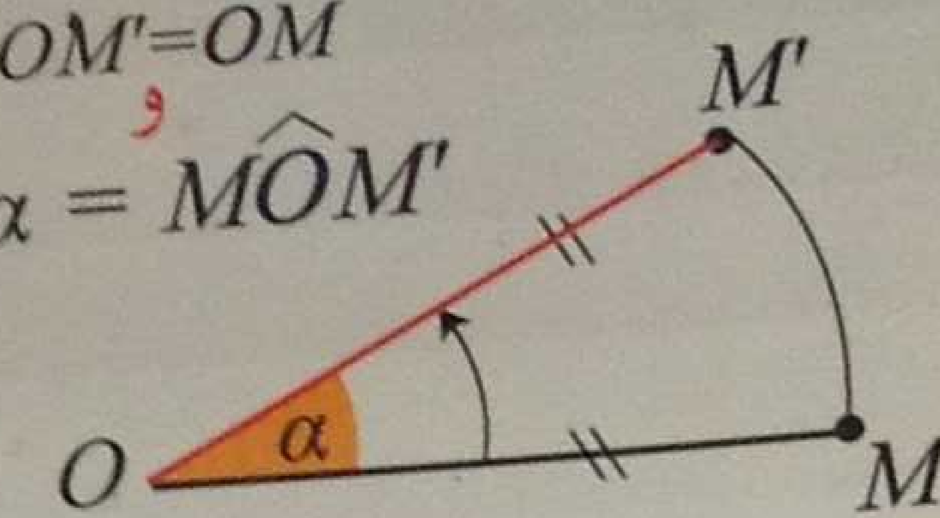
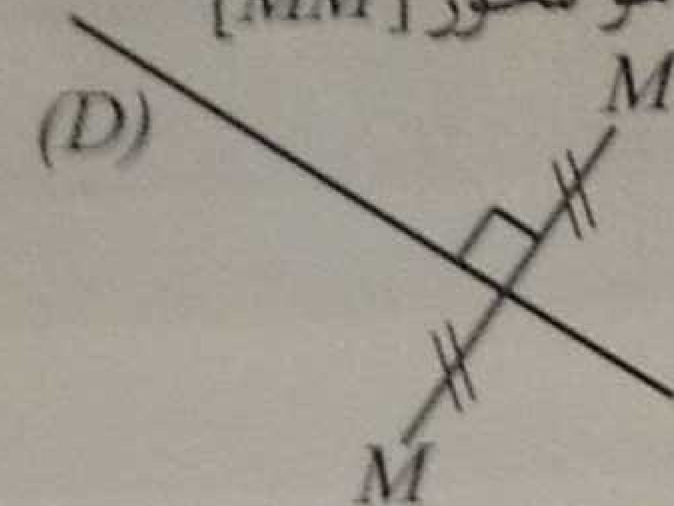

## العلاقات المترية في المثلث القائم

إذا كان $ABC$ مثلثا قائما في $A$ و $(AH)$ الارتفاع المتعلق الضلع $[BC]$ فإن :

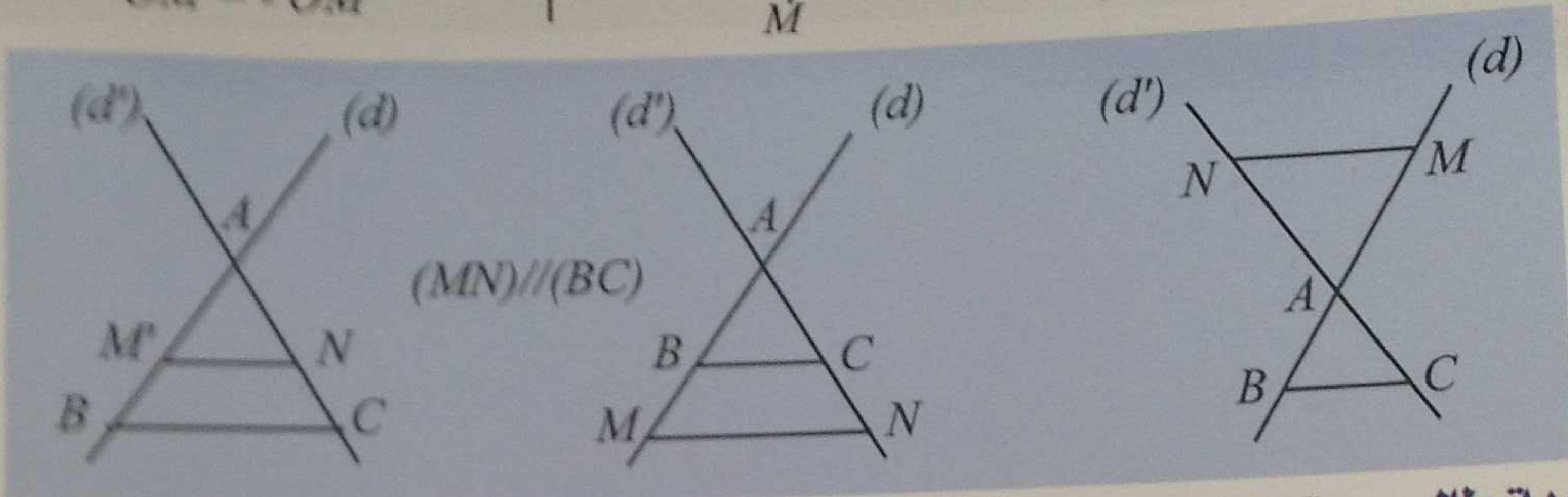
- $AB \times AC = AH \times BC$
- $AB^2 = BH \times BC$
- $AC^2 = CH \times CB$
- $AH^2 = HC \times HB$




مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم هو منتصف الوتر.

| الدوران | التناظر المحوري | التناظر المركزي |
| --- | --- | --- |
| النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\alpha$ يعني: $\begin{cases} OM'=OM \\ \text{و} \\ \alpha = \widehat{MOM'} \end{cases}$  | النقطة $M'$ صورة $M$ بالتناظر المحوري الذي محوره $(D)$ يعني أن $(D)$ هو محور $[MM']$  | النقطة $M'$ صورة $M$ بالتناظر المركزي الذي مركزه $O$ يعني أن $O$ هي منتصف $[MM']$  $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ |

## نظرية طالس وعكسها




- **نظرية طالس**. $(d)$ و$(d')$ مستقيمان متقاطعان في $A$ ، $B$ و $M$ نقطتان من $(d)$ ومختلفتان عن $A$ ، $C$ و $N$ نقطتان من $(d')$ مختلفتان عن $A$

- إذا كان $(BC)//(MN)$ فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

تفيد في حساب الأطوال

- **عكس نظرية طالس**
- إذا كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ و إذا كان $A,B,M$ و $A,C,N$ بنفس الترتيب فإن : $(BC)//(MN)$ .

تفيد عكس نظرية طالس في إثبات التوازي

- **مستقيم المنتصفين في مثلث** المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.

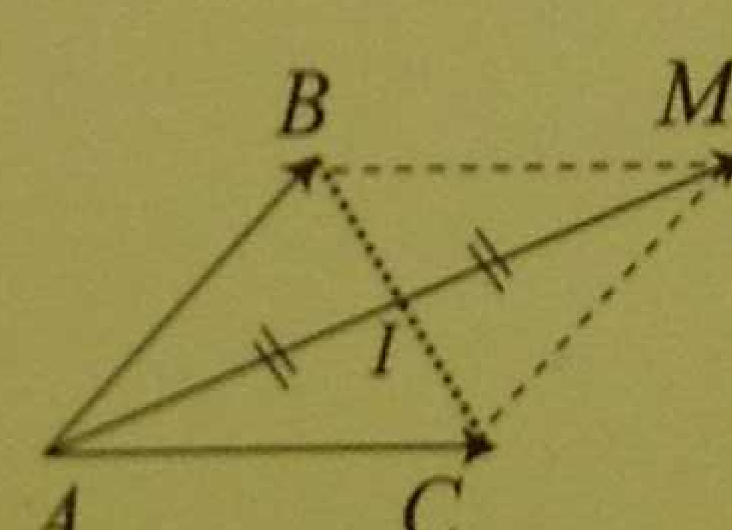
## الجمع الشعاعي

- **علاقة شال**

من أجل كل ثلاثة نقاط من المستوي فإن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

- **قانون متوازي الأضلاع**



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI}$$

حيث $ABMC$ متوازي أضلاع

- الشعاع المعدوم $\overrightarrow{0}$ هو شعاع بدايته منطبقة على نهايته.

مثل : $\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{AA}$

- الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان ونكتب :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$ أو $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

إذا كانت : $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ نقطتان من معلم متعامد و متجانس فإن :

$$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A)$$

- $$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

إحداثيات $I$ منتصف $AB$

- $$\boxed{I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

## الإرتباط الخطي

يكون الشعاعان $\vec{u}\,(x,y)$ و $\vec{v}\,(x',y')$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان : $xy' - x'y = 0$

الشعاعان المرتبطان خطيا هما شعاعان متوازيان.

● **معادلة المستقيم**

كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax + by + c = 0$ حيث $a$ ، $b$ غير معدومين معا.

كل معادلة من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $a$ و $b$ غير معدومين معا هي معادلة مستقيم شعاعه التوجيهي $\vec{u}\,(-b,a)$ ومعامل توجيهه يساوي $\frac{a}{-b}$

إذا كان المستقيم لا يوازي محور التراتيب فإن معادلته المختصرة هي : $y = ax + b$ حيث $a$ معامل توجيهه.

يكون المستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.

## جملة معادلتين

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \ldots (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

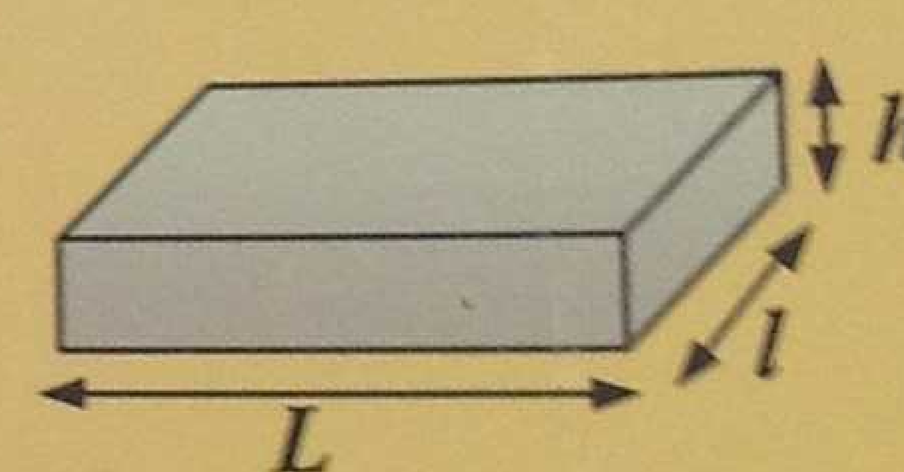
- محدد الجملة هو : $\Delta = ab' - a'b$
- إذا كان $\Delta = 0$ الجملة مستحيلة أو لها عدد لا نهائي من الحلول.
- إذا كان $\Delta \neq 0$ الجملة لها حل وحيد نحصل عليه بطريقة التعويض أو توحيد المعاملات .

### التفسير البياني لحل جملة معادلتين

نرسم المستقيم الذي تمثله المعادلة الأولى ثم نرسم المستقيم الذي تمثله المعادلة الثانية فتكون إحداثيي نقطة تقاطعهما هي حل الجملة.

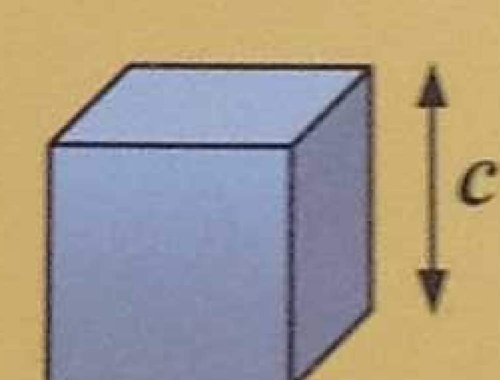
## الحجوم

متوازي مستطيلات




الحجم $V = L \,.\, l \,.\, h$

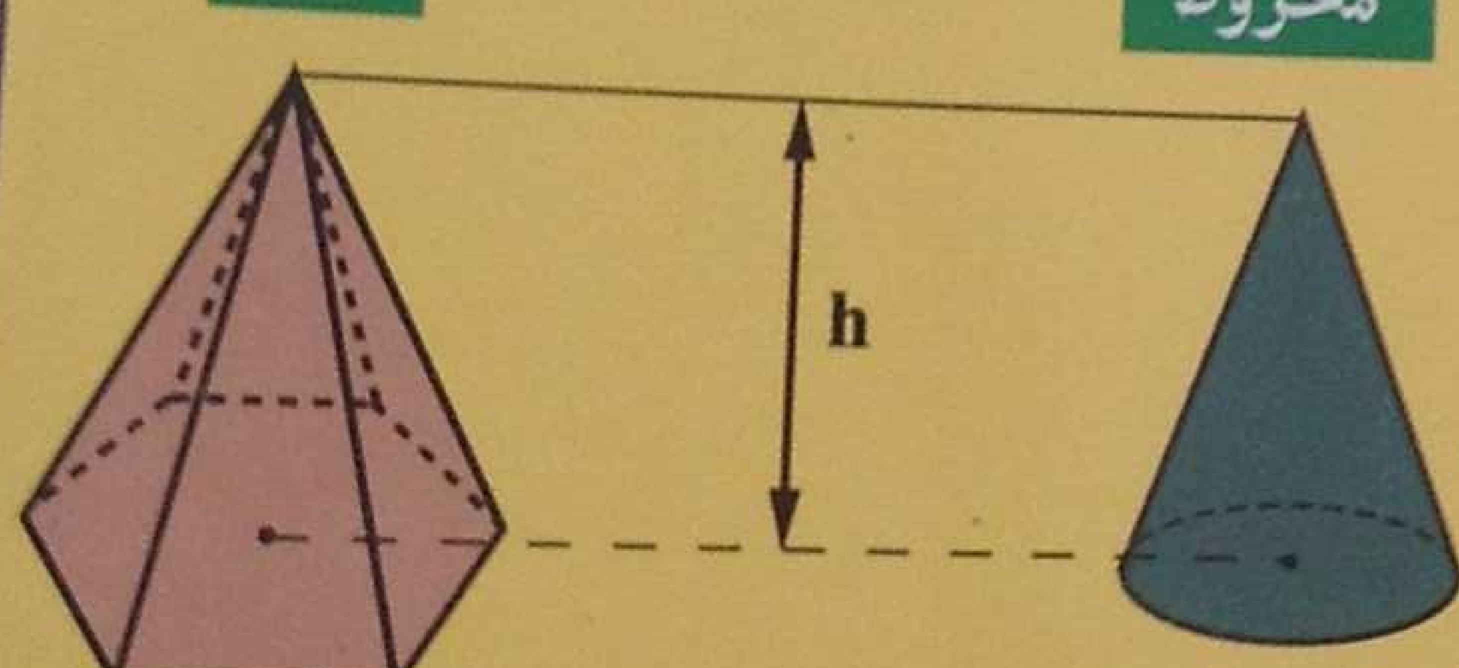
مكعب




الحجم $v = c^3$

مخروط

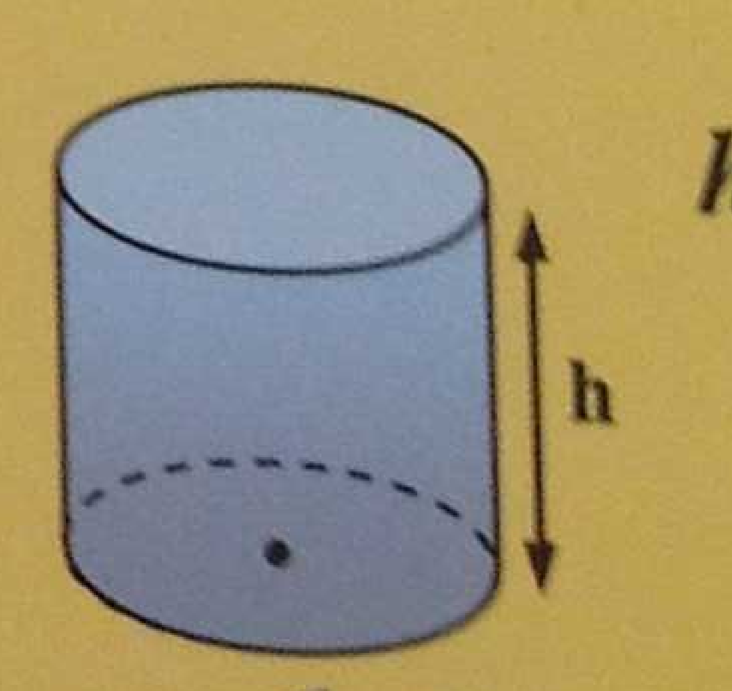
هرم




الحجم: $V = \frac{1}{3} \times B \times h$

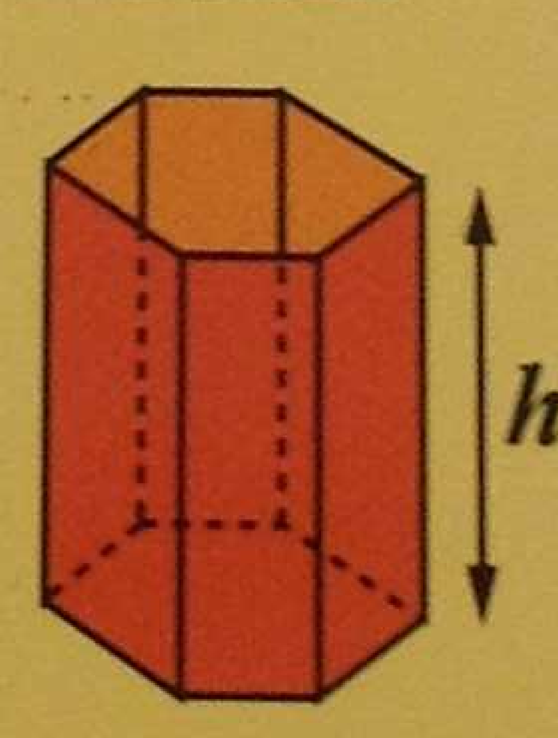
$B$ : مساحة القاعدة

أسطوانة




الحجم $V = \pi \,.\, r^2 \,.\, h$

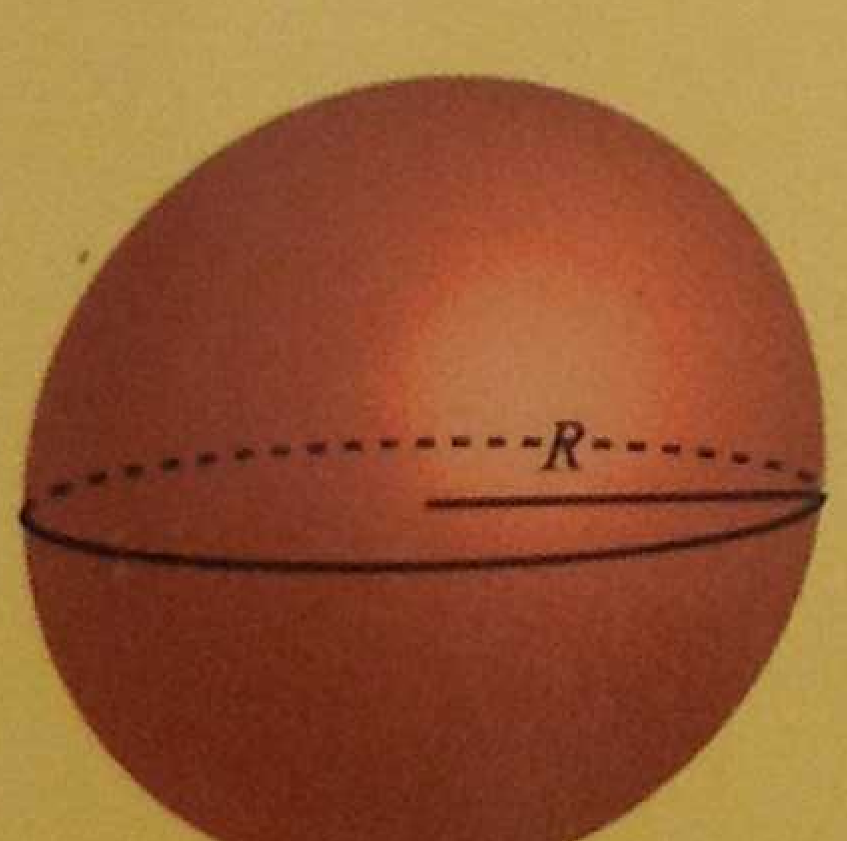
موشور قائم




الحجم $V = B \,.\, h$

مساحة القاعدة

كرة




$V = \frac{4}{3}\pi \,.\, r^3$


كليك للنشر

حي الكثبان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.

021 82 96 37 / 021 ... ، الناسوخ: 021 82 96 37.