التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.

العدد الحقيقيF(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b

ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x \to \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \to \ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$

* أحسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x dx$; $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

* $\int_a^a f(x)dx = 0$ * $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I = \int_{-1}^{1} |x|dx$

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_0^1 xdx = \left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\varphi(x) = F(x) - F(a) \quad \forall x \in I$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f \quad \varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \to \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $f(x) = \frac{1}{x}\ln x \qquad \forall x \in]0;+\infty[$

ج)- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

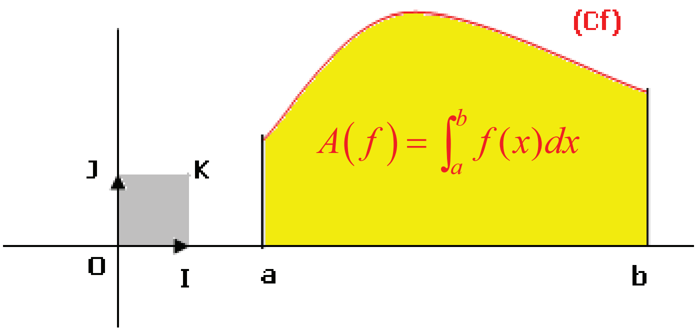
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx \quad ; \quad \int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

أحسب $I + J \quad I - J$ و استنتج $I \quad ; \quad J$

د التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a \prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$A(f) = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x) = \frac{1}{x^2}$

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\|=1cm \quad \|\vec{j}\|=2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1 \quad ; \quad x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e = \frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1} = 2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل $-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx = \left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1 = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين

1- حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a وb وc حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2+1} \qquad \forall x \neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+5}dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx \qquad \left(\frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x \in [a;b] \qquad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a;b] \qquad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[(fg)(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x \quad ; \quad v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x \quad ; \quad v'(x)=1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

تمرين

أحسب $I = \int_1^e \ln x\,dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx \quad ; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$

الحل

$$K = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = ...$$

تمرين 1- أحسب $\int_1^2 x^2 \ln x\,dx \qquad \int_0^3 (x-1)e^{2x}\,dx \qquad \int_0^1 x\sqrt{x+3}\,dx \qquad \int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|dx$

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب $I = \int_0^x e^t \cos^2 t\,dt$ (يمكن اعتبار $J = \int_0^x e^t \sin^2 t\,dt$)

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

a) لتكن f دالة متصلة على [a;b] و F دالة أصلية لـ f على [a;b]

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \forall x \in [a;b] \quad F'(x) = f(x)$$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان F تزايدية على $[a;b]$

وحيث أن $a \le b$ فان $F(a) \le F(b)$ اذن $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

خاصية

> لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \le b)$
>
> إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

b) خاصية

> لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ $(a \le b)$
>
> إذا كانت $f \le g$ على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

مثال

نؤ طر $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

لدينا $1 \le 1+x \le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \le \frac{x^2}{1+x} \le x^2 \qquad \forall x \in [0;1]$ ومنه $\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx \le I \le \int_0^1 x^2\,dx$

إذن $\frac{1}{6} \le I \le \frac{1}{3}$

c) خاصيات

أ-   لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ ($a \le b$)

إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

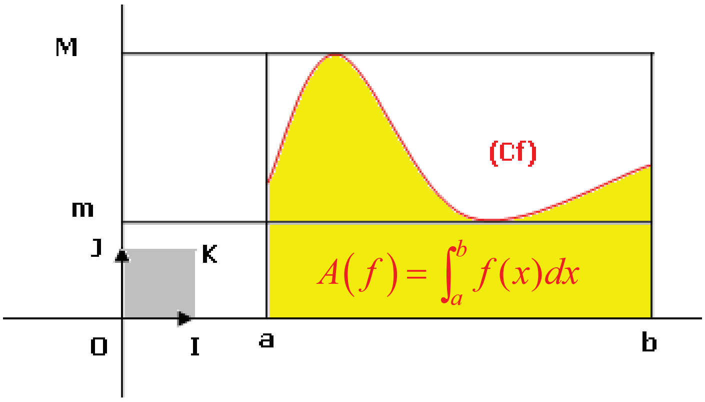
ب- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ج- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ و المستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I=\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ نبين أن $0 \le I \le \sqrt{2}$

الدالة $x \to \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0;+\infty[$ ومنه $\sup_{x\in[1;3]} f(x)=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0 \le I \le (3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ ($a \prec b$) و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

إذن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a;b]$

حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ ($a \ne b$)

العدد الحقيقي $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$.

يوجد على الأقل c في $[a;b]$ حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل

الذي بعداه $(b-a)$ و $f(c)$.

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

a) $f(x)=(x-1)e^{x}$ $\quad I=[-1;0]$; b) $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+x+3}{x+1}$ $\quad I=[0;1]$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\arctan x$

الجواب عن السؤال2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in[0;1]$ و منه

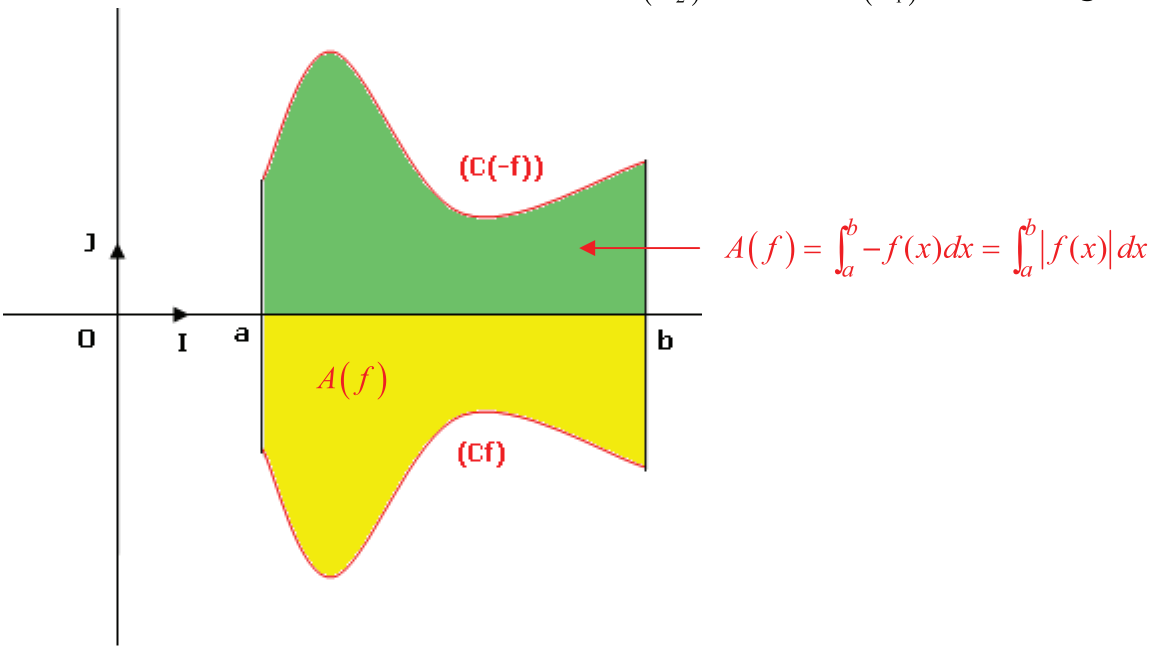
$\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 1$ $\forall x\in[0;1]$ اذن $\int_0^x \dfrac{1}{2}dt \le \int_0^x f'(t)dt \le \int_0^x dt$ $\quad \forall x\in[0;1]$ $\dfrac{x}{2}\le f(x)\le x$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $\quad (\Delta_2): x=b$



*إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

*إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f)=\int_a^b -f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a;b]$ مثلا يوجد c من $[a;b]$ حيث f موجبة على $[a;c]$ و سالبة على $[c;b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a;b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a;c]$ و $\Delta(f)$ على $[c;b]$

$$A(f)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل

و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)|dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 1$

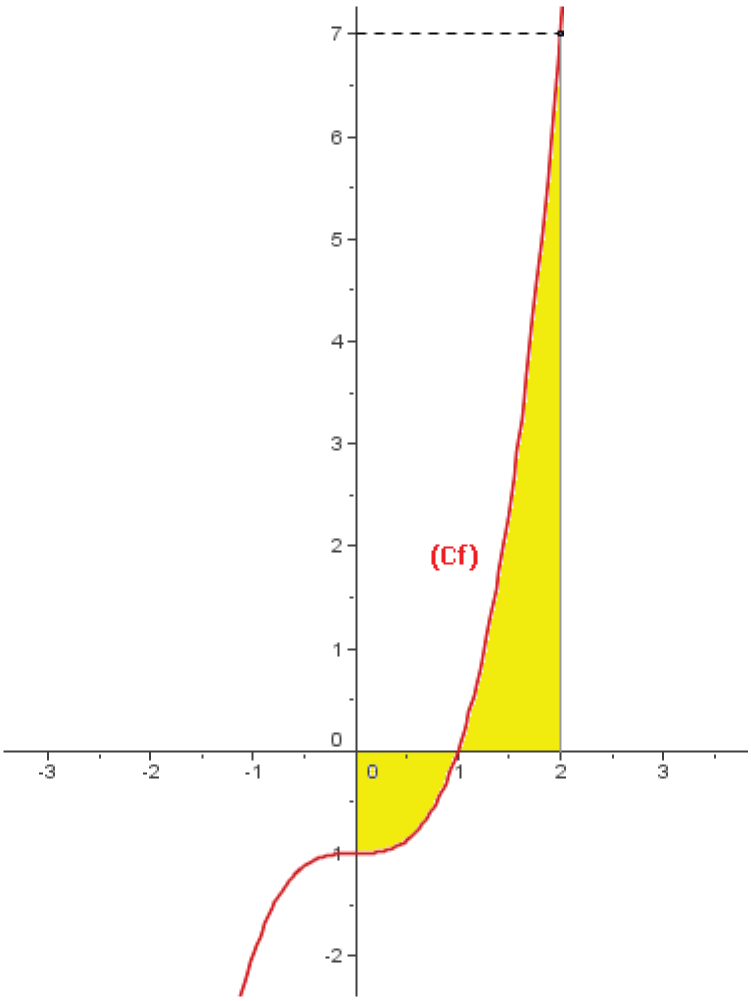
حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

$x = 0 \quad ; \quad x = 2$

$$A = \int_0^2 |f(x)|dx$$

$$A = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - 1)dx$$

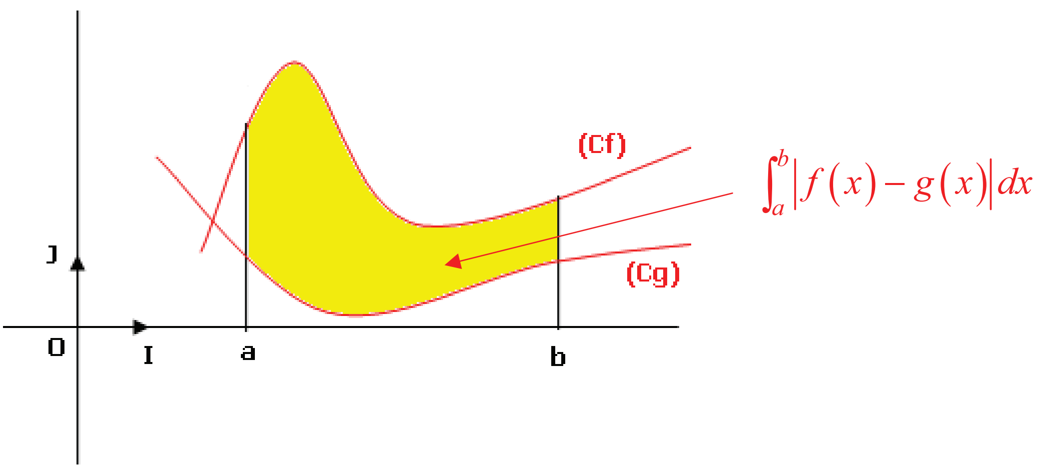
$$A = \frac{7}{2}u \qquad \left(u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\right)$$



2- مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$ في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و بإتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

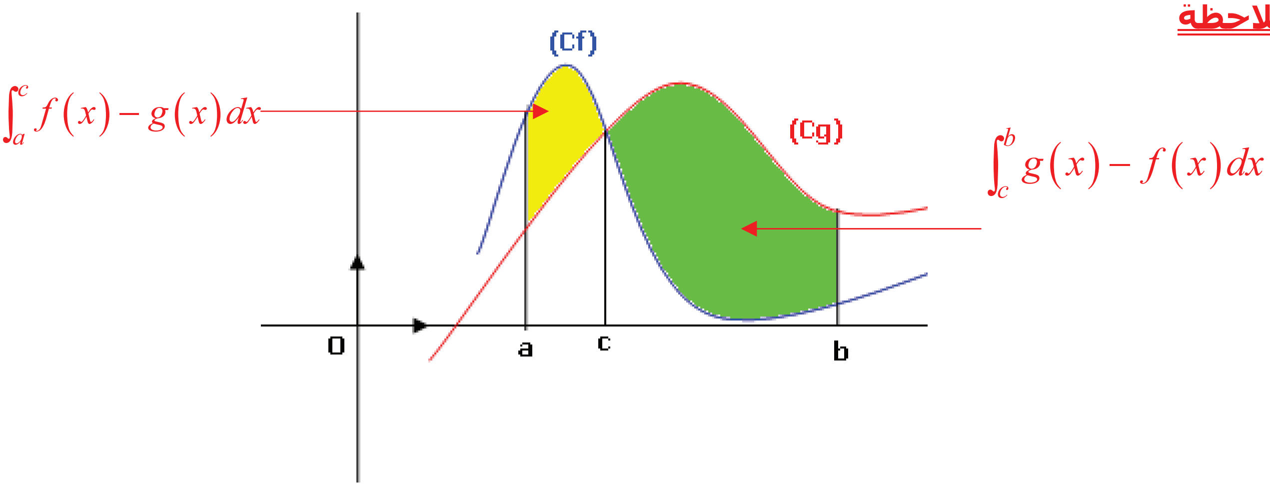
خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$

هي $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

V- حساب الحجوم في الفضاء

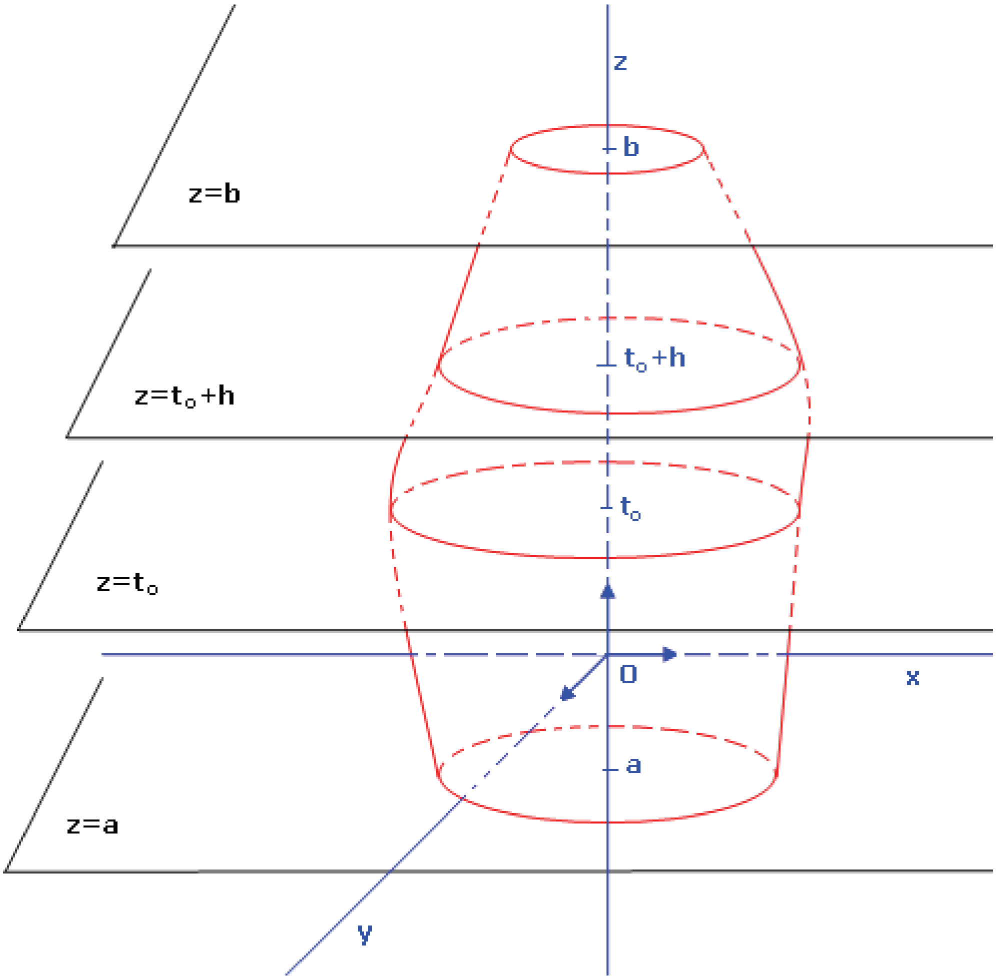
الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه $\|\vec{i}\|$

1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$

نرمز بـ$S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z = t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z = a$; $z = t$

ليكن t_0 من $[a;b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0 + h \in [a;b]$



حجم مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S المحصورة بين $z=t_0$ و $z=t_0+h$ هو $V(t_0+h)-V(t_0)$
ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0+h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0)\le S(t_0+h)$ فان $h\cdot S(t_0)\le V(t_0+h)-V(t_0)\le h\cdot S(t_0+h)$

و منه $S(t_0)\le \dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}\le S(t_0+h)$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t\to S(t)$ متصل على $[a;b]$ فان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=S(t_0)$

إذن الدالة $t\to V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ و $V'(t)=S(t)\quad \forall t\in[a;b]$

أي أن الدالة $t\to V(t)$ دالة أصلية للدالة $t\to S(t)$ على $[a;b]$

و بما أن $V(a)=0$ فان $V(t)=\int_a^t S(x)dx\quad \forall t\in[a;b]$

إذن حجم المجسم S هو $V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$ وحدة قياس الحجم .

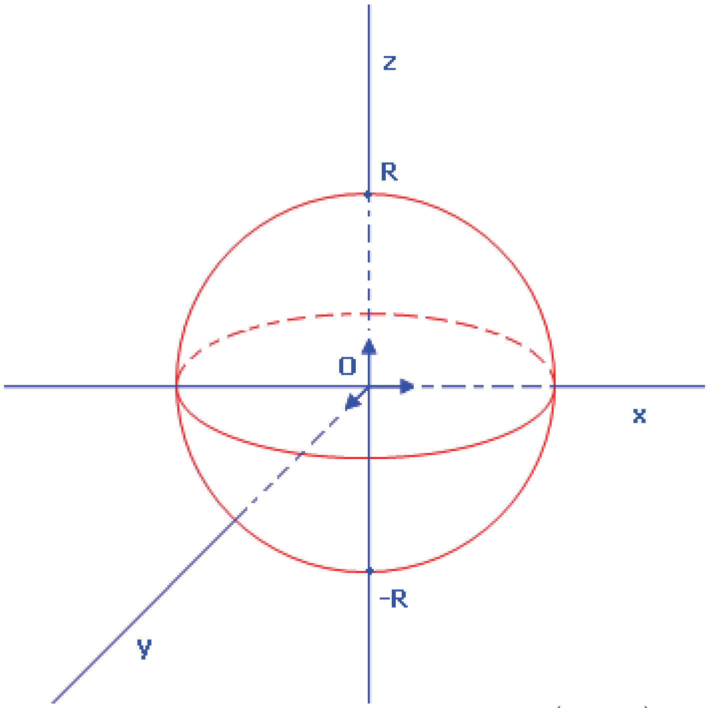
خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ$S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$

إذا كان أن التطبيق $t\to S(t)$ متصلا على $[a;b]$ فان حجم المجسم S هــو $V=\int_a^b S(z)dz$ وحدة قياس الحجم.



تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O.

الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي بالمعادلتين $z = R \quad ; \quad z = -R$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفلكة حيث $z = t$

$-R \le t \le R$ هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$

و مساحته $S(t) = \pi\left(R^2 - t^2\right)$

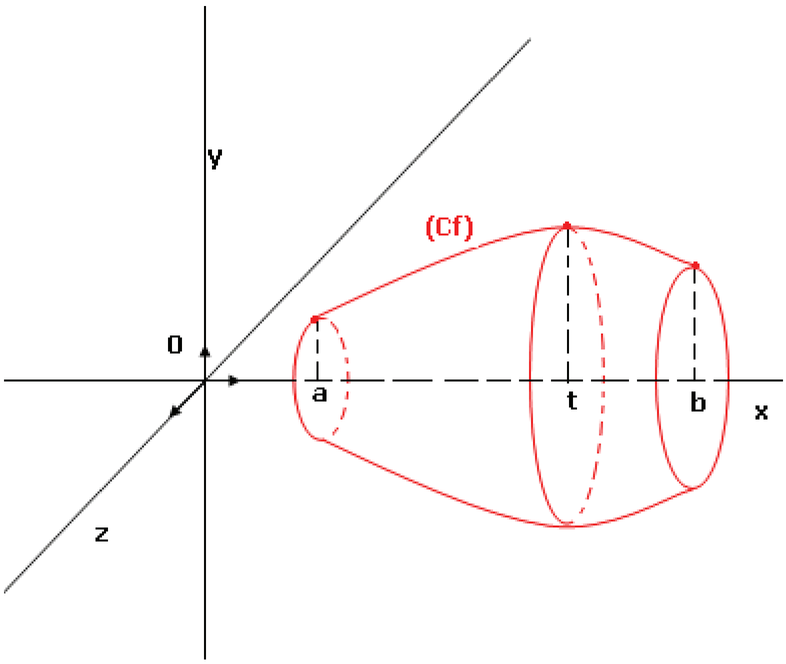
بما أن التطبيق $t \to \pi\left(R^2 - t^2\right)$ متصلة على $[-R;R]$

فان $V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - t^2\right)dt = \frac{4}{3}\pi R^3$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O;\vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$$S(t) = \pi f^2(t)$$

التطبيق $t \to \pi f^2(t)$ متصلة على $[a;b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a;b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

بوحدة قياس الحجم .

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{2}x\ln x$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1;e]$

R

تمارين و حلول

تمرين1

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

ب/ أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

أحسب $I+J$ **و** $I-J$ **ثم استنتج** I **و** J

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{t+2-t}{t(t+2)}=\frac{1}{t(t+2)}$$

ب/ نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_1^2=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

2- نحسب $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$$A=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=.........$$

-3 نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

نحسب $I+J$

$$J+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

نحسب $I-J$

R

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ اذن $I-J=\frac{-\pi}{4}$

نستنتج I **و** J

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

تمرين2

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $\mathbb{R}$ **بـ** $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

1- حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2- أحسب $f'(x)$ **و أعط جدول تغيرات** f **و أنشئ** C_f

3- حدد المساحة A_k **المحصور بين** C_f **و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين** $x=0$; $x=k$ **حيث** k **عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار** $t=e^x$**)**

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

4- نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(1-e^x\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ;$$

5- أنسب $f'(x)$ **و نعطي جدول تغيرات** f **و أنشئ** C_f

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

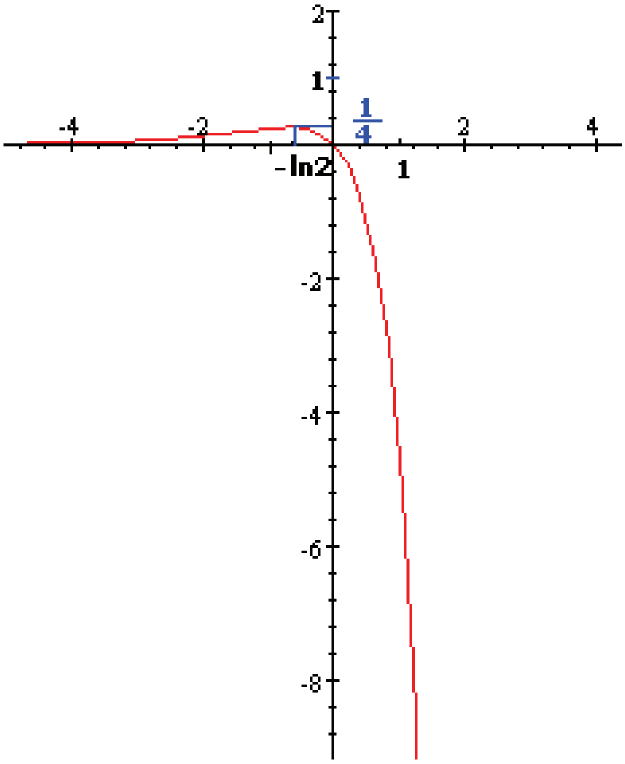
6- نحدد المساحة A_k

$$A_k = \int_k^0 f(x)\,dx = \int_k^0 e^x - e^{2x}\,dx$$

$$A_k = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k}$$

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$\lim_{k\to-\infty} A_k = \lim_{k\to-\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k} = \frac{1}{2}$$



تمارين

تمرين1

1- حدد a ; b ; c حيث $\frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$

أحسب $\int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}dx$

2- أحسب $\int_0^1 \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

3- بين أن $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أحسب $\int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}dt$

تمرين2

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$; $\int_0^1 x^2\ln(x^2+1)dx$ $\int_0^{\ln 2}(x+2)e^{2x}dx$

و $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x\to\sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$

1- أحسب I_1

2- بين $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب I_2 I_3

4- أستنتج $\int_0^1 (x^3+2x^2-2x)e^x dx$

تمرين4

1- بين أن $1-x\le\frac{1}{1+x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

2- استنتج $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

3- استنتج تأطيرا لـ $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ إلى 0,1.

تمرين9

1- تحقق أن $\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

2- نعتبر $k\in[0;1]$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k=\int_k^1 \frac{2x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

حدد $\lim A_k$

R

تمرين10

1- أ- تأكد أن $\frac{t^2-t+1}{t(t^2+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2-t+1}{t(t^2+1)}dt$

2- أحسب $\int_0^1(3x^2+2x+1)\ln(x+1)dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

1- تأكد أن $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

2- أحسب $I(\alpha)=\int_\alpha^1\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha\in]0;1[$

3- أحسب $\lim_{\alpha\to0^+}I(\alpha)$

تمرين12

نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ و $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$; $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$

1- أحسب I_1 و استنتج I_3 ; I_5

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x dx$ و استنتج $I_{n+2}-I_n$ بدلالة n.

3- أ- بين أن الدالة $x\to\ln\left[tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ دالة أصلية للدالة $x\to\frac{1}{\cos x}$ على $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم I_2 ; I_4