دليل مختصر للطرق المتّبَعة عند الإجابة عن أسئلة الدّوال
لأ قسام السنة الثانية والثالثة ثانوي

في كلّ ما يلي : يرمز D_f إلى مجموعة تعريف دالة f ،أمّا C_f فيرمز إلى منحنيها في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ملاحظة: إذا كتبنا ∞ فنقصد $+\infty$ أو $-\infty$.

1)المستقيم المقارب العمودي:

إذا كان $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$ فإنّ تفسير ها البياني(أو الهندسي) هو: المنحنى C_f يقبل مستقيما مقاربا عموديّا معادلته $\boxed{x=a}$.

2)المستقيم المقارب الأفقي:

إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=b}$ فإنّ تفسير ها البياني(أو الهندسي) هو: C_f يقبل مستقيما مقاربا أفقيّا معادلته $\boxed{y=b}$ ،وذلك بجوار ∞.

3)المستقيم المقارب المائل:

ا-لإثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب مائل لـ C_f بجوار ∞ ، يكفي أنْ نثبت أنّ : $\boxed{\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0}$.

ب- إذا لم تُعطَ لنا معادلة المستقيم المقارب المائل، و طلِب منّا تعيينه، ننظر إلى عبارة $f(x)$، فإنْ كانت من الشكل التالي:

$$f(x)=ax+b+\varphi(x) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$$

فالمستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ C_f عند ∞.

إذا لم تتوفر الملاحظة السابقة، نعيّن المستقيم المقارب المائل بالطريقة التالية: نحسب $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، فنجد عددا حقيقيّا a غيرمعدوم، ثم نحسب $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ ، فنجد عددا حقيقيّا b و تكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y=ax+b$.

4)الدالة الزوجيّة:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أنّ f زوجيّة، نبر هن،من أجل كل x من D_f، أنّ: $\boxed{f(-x)=f(x)}$

ملاحظة هامّة: إذا كانت f زوجيّة، فيُمكِن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم نُكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

5)الدالة الفرديّة:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أنّ f فرديّة، نبر هن،من أجل كل x من D_f، أنّ: $f(-x)=-f(x)$ أو $\boxed{f(-x)+f(x)=0}$.

ملاحظة هامّة: إذا كانت f فرديّة، فيُمكِن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم نُكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى مبدإ المعلم.

6)الدالة الدوريّة:

f دالة، و p عدد حقيقي غير معدوم، بحيث من أجل كل x من D_f، $x+p$ ينتمي إلى D_f. لإثبات أنّ p دَوْرٌ للدالة f نبر هن، من أجل كل x من D_f، أنّ : $\boxed{f(x+p)=f(x)}$.

ملاحظة1 : الدّوْر P للدالة f هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما يحقق العلاقة السابقة .

ملاحظة2 : إذا كانت f دوريّة، فيُمكِن الاكتفاء بإنشاء جزء من C_f على مجال طوله الدور P.

7)مركز التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α.

لإثبات أنّ النقطة $\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر للمنحني C_f ، يكفي أنْ نثبت، من أجل كل x من D_f ، أنّ :

$\boxed{f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta}$ أو $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$.

8)محور التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α.

لإثبات أنّ المستقيم $(D): x=\alpha$ محور تناظر للمنحني C_f ، يكفي أنْ نثبت، من أجل كل x من D_f ، أنّ :

$\boxed{f(2\alpha-x)=f(x)}$ أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$.

9)نقطة الانعطاف:

بصفة عامّة، لتعيين نقطة الانعطاف، نقوم بما يلي: نحسب المشتق الثاني $f''(x)$ ، و ندرس إشارته ، فإذا وجدنا $f''(x)$ انعدم عند قيمة x_0 من D_f ، مُغيّراً إشارته، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f.

حالة خاصّة: في بعض الحالات، يمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$ ، وذلك إذا انعدم المشتق الأوّل $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f ، ولمْ يغيّر إشارته ، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f.

حالة أخرى: إذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ أو $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ ؛ فالتفسير الهندسي هنا هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f.(فائدة: يكون المماس عند هذه النقطة موازيا لمحور التراتيب).

ملاحظة: في بعض الحالات، يَفرضُ علينا سياق التمرين أن نعيّن نقطة الانعطاف بالكيفيّة التالية :

يُطلب منّا أنْ ندرس وضعيّة المنحني C_f بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، فإذا وجدنا أنّ C_f غيّر وضعيّته بالنسبة إلى المماس(قبْل و بعْد نقطة التّماس) نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f.

10)تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل، نحلّ المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ حيث $x\in D_f$. (طبْعاً، إذا كانت قابلة للحل !)

11)تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب:

f دالة حيث $0\in D_f$ لتعيين نقطة تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب، نعوّض x بالصفر في عبارة $f(x)$.

تابع للدّليل المختصر
(الصفحة الثانية)

12)المماس:

هناك ستّ صِيَغ- تقريبا- لطرح سؤال المماس، لكنْ تبقى معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة على أيٍّ منها كما سنرى.

1/الصّيغة الأولى(العاديّة) : اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

الإجابة: نكتب الدستور: $y=f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$ حيث نُعوّض x_0 بقيمتها المعطاة.

2/الصّيغة الثانية: اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الترتيب y_0 .

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$ ، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

3/الصّيغة الثالثة: بيّن أنه يوجد مماس- أوْ أكثر- للمنحني C_f ميْله (أوْ معامل توجيهه) يساوي a .

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=a}$ ، وعند تعيين قيمة(أوْ قيَم) x_0 نكون قد عُدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

ملاحظة: عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.

4/الصّيغة الرابعة: بيّن أنه يوجد مماس- أوْ أكثر- للمنحني C_f يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$.

الإجابة: نحل المعادلة $\boxed{f'(x_0)=a}$ (عُدنا إلى الحالة الثانية).

5/الصّيغة الخامسة:بيّن أنه يوجد مماس-أوْ أكثر- للمنحني C_f يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$.

الإجابة: نحل المعادلة $\boxed{a.f'(x_0)=-1}$.

6/الصّيغة السادسة:بيّن أنه يوجد مماس-أوْ أكثر- للمنحني C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيّيْ (α,β) .

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{\beta=f'(x_0).(\alpha-x_0)+f(x_0)}$ عند تعيين قيمة (أوْ قيَم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

13)النقطة الزّاويّة: إذا كان:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$$

حيث l_1 و l_2 عددان حقيقيّان $(l_1\neq l_2)$، فالتفسير الهندسي هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 : نقطة زاويّة للمنحني C_f .

ملاحظة1: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي :

$$\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1 \quad \text{و} \quad \lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$$

ملاحظة2: معادلتا نصفيْ المماسيْن عند النقطة الزاويّة هما:

$$\begin{cases} y=f_d'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)\\ x\geq x_0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y=f_g'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)\\ x\leq x_0\end{cases}$$

عِلما أنّ : $f_g'(x_0)=l_1$ وَ $f_d'(x_0)=l_2$.

تنبيه: تبقى النقطة الزاويّة موجودة حتّى لو كانت إحدى النهايتيْن السابقتيْن عددا حقيقيّا l وَ الأخرى $+\infty$ أو $-\infty$.

14)استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعْد إنشاء C_f ، قد يُطلب منّا أنْ نستنتج منحنياً آخر- C_h مثلا- لدالة h ؛ و يكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي :

1/الصّيغة الأولى: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x)=|f(x)|$

الإجابة: 1)على المجالات التي تكون فيها $f(x)\geq 0$ (أي يكون فيها C_f على محور الفواصل أو فوْقه)

نحصل على $h(x)=f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f .

2) على المجالات التي تكون فيها $f(x)\prec 0$ (أي يكون فيها C_f تحت محور الفواصل)

نحصل على $h(x)=-f(x)$ ، ومنه يكون C_h نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

2/الصّيغة الثانية: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x)=f(|x|)$

ملاحظة: غالباً ما يُطلب منّا أوّلاً أنْ نثبت أنّ h زوجيّة.

الإجابة:1)إذا كان $x\geq 0$ و $x\in D_f$ (الجزء الموجب من D_f)

نحصل على $h(x)=f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f .

2)نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ h زوجيّة.

3/الصّيغة الثالثة: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x)=f(-|x|)$

ملاحظة: غالباً ما يُطلب منّا أوّلاً أنْ نثبت أنّ h زوجيّة.

الإجابة:1)إذا كان $x\leq 0$ و $x\in D_f$ (الجزء السالب من D_f)

نحصل على $h(x)=f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f .

2)نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ h زوجيّة.

4/الصّيغة الرابعة: استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x)=-f(x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

5/الصّيغة الخامسة:استنتج C_h منحنى h حيث: $h(x)=f(-x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور التراتيب.

6/الصّيغة السادسة: استنتج C_h منحنى الدالة h التي تحقق : $h(x)=-f(-x)$.

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

7/الصّيغة السابعة: استنتج C_h منحنى الدالة h التي تحقق : $h(x)=f(x+a)+b$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيّان

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}-a\\+b\end{pmatrix}$.

8/الصّيغة الثامنة: استنتج C_h منحنى الدالة h التي تحقق : $h(x)=k.f(x)$ ؛ $k\in\mathbb{R}^*$.

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالتآلف $A(x'x,y'y,k)$.

ملاحظة: هذه أبرز الحالات ، وغيرها شبيه بها أو يعود إليها.