المفكرة الشاملة في الرياضيات

تعديل : بوتليس بلال

هدية لتلاميذ باكالوريا 2012

منشورات رأس العين

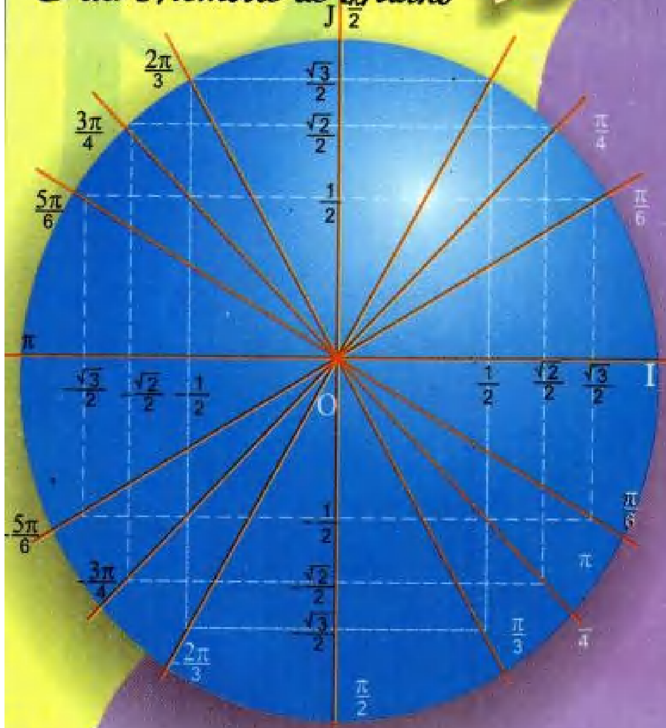
الأستاذ: كمال رأس العين

المفكرة الشاملة في الرياضيات

لطلاب الثانوي

... ليست مجرد مفكـرة

Aid Memoire de Maths



لعلك نسيت علاقة
أوتعريف أو مبرهنة...
وأنت في حاجة
الى استعمالها الآن..
إن المفكرة تساعدك
على حفظ وتذكر مانسيته.

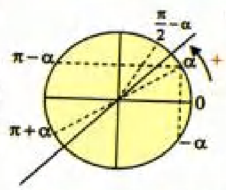
المحتويات

- حساب المثلثات
- الأعداد المركبة
- التحويلات النقطية
- التحليل التوفيقي
- المتاليات
- الإستمرارية
- الإشتقاقية
- الدوال الأصلية
- الدالتان اللوغارتمية و الأسية
- المعادلات التفاضلية
- الهندسة الفضائية
- تمارين أساسية

مطبعة الأقصى
070.34.03.31

العلاقات المثلثية

$A\hat{O}B$ قيسها 1 rad إذا كان طول القوس AB يساوي نصف قطر هذه الدائرة



$$\sin\alpha = \frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول الوتر}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{طول المقابل}}{\text{طول المجاور}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول الوتر}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول المقابل}}$$

$1\text{rad} \approx 57{,}3°$

$1° \approx 0{,}02\,\text{rad}$

$2\pi\ \text{rad} = 360°$

العلاقات بين النسب المثلثية لنفس الزاوية :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \qquad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a} \qquad \sin^2 a = \frac{1}{1 + \cos^2 a}$$

نبذة تاريخية

sin أصلها هندي "جيبا" و استخدمها العرب فيما بعد "جيب" و ترجمت إلى اللاتينية sinus

دساتير ضعف الزاوية :

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

دساتير الجمع :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

تحويل جداء إلى مجموع

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

عبارة $\sin a$; $\tan a$; $\cos a$ بدلالة $\tan\frac{a}{2}$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$$

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1 - \tan^2\frac{a}{2}}$$

جدول النسب المثلثية :

	α	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
sin	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
tan	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$
cot	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$

تحويل مجموع الى جداء :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}$$

	الربع الأول					الربع الثاني				الربع الثالث				الربع الرابع			
α	0 $0°$	$\pi/6$ $30°$	$\pi/4$ $45°$	$\pi/3$ $60°$	$\pi/2$ $90°$	$2\pi/3$ $120°$	$3\pi/4$ $135°$	$5\pi/6$ $150°$	π $180°$	$7\pi/6$ $210°$	$5\pi/4$ $225°$	$4\pi/3$ $240°$	$3\pi/2$ $270°$	$5\pi/3$ $300°$	$7\pi/4$ $315°$	$11\pi/6$ $330°$	2π $360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt2}{2}$	$\frac{-\sqrt3}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt3}{2}$	$\frac{-\sqrt2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt2}{2}$	$\frac{-\sqrt3}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt3}{2}$	$\frac{-\sqrt2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt3}{3}$	1	$\sqrt3$	غ م	$-\sqrt3$	-1	$-\frac{\sqrt3}{3}$	0	$\frac{\sqrt3}{3}$	1	$\sqrt3$	غ م	$-\sqrt3$	-1	$-\frac{\sqrt3}{3}$	0
$\cot\alpha$	غ م	$\sqrt3$	1	$\frac{\sqrt3}{3}$	0	$-\frac{\sqrt3}{3}$	-1	$-\sqrt3$	غ م	$\sqrt3$	1	$\frac{\sqrt3}{3}$	0	$-\frac{\sqrt3}{3}$	-1	$-\sqrt3$	غ م

الأعداد المركبة

الكتابة الجبرية والمثلثية والأسية لعدد مركب

z : عدد مركب

a: الجزء الحقيقي $Re(z)$

b : الجزء التخيلي $Im(z)$

ρ : طويلة z

θ : عمدة $arg(z)$

$z=a+ib$

$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

$(z=[\rho;\theta])$

$z=\rho e^{i\theta}$

مرافق عدد مركب

z عدد مركب.

$\bar z$ مرافق z .

$z=a+ib$

$\bar z=a-ib$

$z+\bar z=2Re(z)=2a$

$z-\bar z=2Im(z)=2b$

(z عدد حقيقي) معناه: $(z=\bar z)$

(z تخيلي) معناه: $(\bar z=-z)$

z و 'z عددان مركبان:

$z\neq0$

$\overline{\overline{z}}=z$

$\overline{z+z'}=\bar z+\bar z'$

$\overline{zz'}=\bar z\bar z'$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar z}{\bar z'}$

$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar z'}$

طويلة عدد مركب

$|z|$ طويله العدد المركب $z=a+ib$

o $|z|^2=z\bar z$

o $|z|=\sqrt{z\bar z}=\sqrt{a^2+b^2}$

o $z=0$ معناه: $|z|=0$

z و $\bar z$ عددان مركبان و $z'\neq0$

o $|zz'|=|z||z'|$

o $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

o $|z+z'|\le|z|+|z'|$ تسمى المتباينة المثلثية

كيف تحدد طبيعة مثلث ؟

A و B و C نقاط لواحقها z_A و z_B و z_C.

-إذا كان: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ أو $-i$

فإن: ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

-إذا كان: $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

فإن ABC متساوي الساقين في A .

-إذا كان: $\arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$

فإن ABC قائم في A .

-إذا كان: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أو $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

فإن ABC متساوي الأضلاع .

كيف تبحث عن مجموعات نقط ؟

M نقطة متغيرة في المستوي لاحقتها z .

مجموعة النقط M حيث:

$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

هي محور القطعة [AB].

A و B نقطتان ثابتتان في المستوي z_A لاحقة A و z_B لاحقة B.

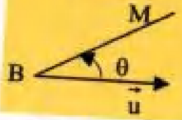
مجموعة النقط M حيث: $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$.

إذا كان r موجب هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r.

$\vec{u}$ شعاع توجيه الوحدة على محور الفواصل .

مجموعة النقط M حيث: $\arg(z - z_B) = \theta \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \theta$

هي نصف مستقيم مبدؤه B .



تمرين أساسي:

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:

1) $|z - 2 - i| = 1$

2) $|z| = |z - 2 - i|$

3) $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

الحل:

1) لتكن A لاحقتها 2+i.

$|z - (2+i)| = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$.

M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 .

2) مجموعة النقط M هي محور [OA] .

3) مجموعة النقط M هي نصف مستقيم [BM) يحدد زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع $\vec{u}$ و B لاحقتها -2i .

التحويلات النقطية

الانسحاب

العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$. $z' = z + b$

حيث b لاحقة الشعاع $\vec{u}$.

التناظر المحوري

العبارة المركبة للتناظر المحوري. $S_{(ox)}$: $z' = \bar{z}$

(ox) هو محور التناظر $\bar{z}$ مرافق z .

الدوران

العبارة المركبة للدوران $R_{\Omega,\theta}$: $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$.

Ω مركز الدوران ، θ زاوية الدوران . z_0 لاحقة Ω.

التحاكي

العبارة المركبة للتحاكي $h_{\Omega,k}$:

$z' - z_0 = k(z - z_0)$

Ω مركز التحاكي k نسبة التحاكي . z_0 لاحقة Ω.

التشابه المباشر

العبارة المركبة للتشابه المباشر:

$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

Ω مركز التشابه ، z_0 لاحقة Ω ، k نسبة التشابه، θ زاوية التشابه .

ملاحظة:

كل من الانسحاب والتحاكي والدوران و التشابه المباشر عبارة مركبة من الشكل: $z' = az + b$.

- إذا كان $a = 1$ (انسحاب). - إذا كان $a \neq 1$ (a عدد حقيقي ، تحاكي) - إذا كان a عدد مركب (تشابه)

تمرين أساسي

A و B و C و D أربع نقاط لواحقها على الترتيب A(3+7i) ، B(-1-6i) ، C(1+3i) ، D(-3-10i)

عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S حيث : S(A) = C و S(B) = D

الحل :

باعتبار الشكل المركب لتشابه S هو : $z' = az + b$

S(A) = C تكافئ $1+3i = a(3+7i) + b$ و S(B) = D تكافئ $-3 - 10i = a(-1-6i)$

بحل المعادلتين معا (جملة) نجد: $a = 1$ و $b = -2 - 4i$ أي : $z' = z - 2 - 4i$

الدالة العددية

كيف نحل المعادلة $f(x) = \lambda$ ؟

لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x) = \lambda$ على المجال $I = [a;b]$

↓

هل f مستمرة على I ؟ — y ← لا يمكن اصدار حكم يجب تجزئة I

↓ نعم

هل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ؟ — y ← ليس للمعادلة حل

↓ نعم

المعادلة $f(x) = \lambda$ ، تقبل على الأقل حل على I
و يكون حلا وحيدا إذا كانت f رتيبة.

ملاحظة :

عادة إذا طلب منا حل المعادلة $f(x) = 0$

بالإضافة إلى شرط الإستمرار يكفي أن نتحقق من ان $f(b)f(a) < 0$

تمرين أساسي :

برهن أن المعادلة $\cos x - x = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;\pi]$

الحل :

نضع $f(x) = \cos x - x$

f مستمرة على $[0;\pi]$ (مجموع دالتين مستمرتين)

من اجل x من $[0;\pi]$ فإن :

$f'(x) = -(\sin x + 1)$ فيكون

f مستمرة و متناقصة على $[0;\pi]$

و $f(0) = 1$ و $f(\pi) = -1 - \pi$

اي 0 محصورين $f(0)$ و $f(\pi)$

و منه المعادلة $\cos x - x = 0$ تقبل حل وحيد .

كيف تبحث عن عناصر تناظر منحني دالة ؟

f دالة عددية معرف على D_f ، C_f تمثيلها البياني .

إذا كان ...	فإن ...
من أجل كل x و x- من D_f $f(-x) = f(x)$	f دالة زوجية (oy) هو محور تناظر C_f
من أجل كل x و x- من D_f $f(x) = -f(x)$	f دالة فردية و مبدأ المعلم هو مركز تناظر C_f
$f(2a - x) = f(x)$	$x = a$ هي معادلة لمحور تناظر C_f
$f(2a - x) + f(x) = 2b$	$(a;b)$ هي احداثيات مركز تناظر

الإشتقاقية

الدالة	المشتقة
$f+g$	$f'+g'$
αf	$\alpha f'$ (α ثابت)
$f.g$	$f'.g+f.g'$
$\dfrac{1}{g}$	$-\dfrac{g'}{g^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'.g-f.g'}{g^2}$
$f\circ g$	$(f'\circ g)\times g'$

* حالة خاصة :

$$(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$$

(u دالة قابلة للاشتقاق $n \geq 1$)

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

* معادلة المماس عند $N_0(x_0; f(x_0))$

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

عناصر التناظر

1) للبرهان أن النقطة $I(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى C_f

نجري التغيير $\begin{cases} x = a+X \\ y = b+Y \end{cases}$

معادلة C_f في المعلم $(0;\vec{i};\vec{j})$: $y = f(x)$

و $Y = -b + f(a+X)$ في المعلم $(I;\vec{i};\vec{j})$

نضع : $g(X) = -b + f(a+X)$

ونبرهن عندئذ أن g دالة فردية

2) للبرهان أن المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تناظر للمنحنى

نجري التغيير التالي $\begin{cases} x = a+X \\ y = Y \end{cases}$

$y = f(x)$ معادلة C_f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

الدوال الأصلية و الحساب التكاملي

- (F دالة أصلية لـ f على I) يعني $F'(x) = f(x)$
- اذا كانت f مستمرة على $[a;b]$ ، فهي تقبل دالة أصلية F
- يكون : $\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

حساب المشتقات

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n (n\in N^*)$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin(ax+b)$	$+a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1+\tan^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\tan(ax+b)$	$a[1+\tan^2(ax+b)]$
$\cot x$	$-a[1+\cot^2 x(ax+b)]$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln\|h(x)\|$	$\dfrac{h'(x)}{h(x)}$
e^x	e^x
$e^{h(x)}$	$h'(x)e^{h(x)}$

لحساب تكامل جداء دالتين

اختر الدالة بغرض اشتقاقها

طبق المكاملة بالتجزئة

$$\int_a^b U'(x)V(x)dx = [U(x).v(x)]_a^b - \int_a^b U(x)V'(x)dx$$

جدول الدوال الأصلية

الدالة	دالتها الأصلية
a	ax+c
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$
cosx	sinx
sinx	- cosx
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\varphi'(x).\varphi(x)$	$\frac{[\varphi(x)]^2}{2}+c$
$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$\frac{-1}{\varphi(x)}+c$
$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$	$2\sqrt{\varphi(x)}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
lnx	x lnx - x + c
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert+c$
$\ln(ax+b)$	$\frac{1}{a}[(ax+b)\ln(ax+b)-ax+c]$
e^x	e^x+c
$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}+c$

حل معادلة أو متراجحة لوغارتمية

طريقة :

1 تحديد مجموعة تعريف D المعادلة أو متراجحة

2 استعمل الخواص المستعملة لـ ln و exp و تبسيطها إلى الشكل $\ln f(x) = \ln g(x)$ أو $\ln f(x) \leq \ln g(x)$

3 حل المعادلة $f(x)=g(x)$ أو المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ نحتفظ بالحلول التي تنتمي إلى D

مثال توضيحي :

أحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ ، نضع $V(x)=x$ ومنه $V'(x)=1$

و $U'(x)=\sin x$ ومنه $U(x)=-\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x dx = 1$$

خواص الدالتين ln و exp :

ln معرفة على R_+^*	exp معرفة على R
$\ln a = \ln b$ معناه $a=b$	$e^a=e^b$ معناه $a=b$
$\ln a > \ln b$ معناه $a>b$	$e^a>e^b$ معناه $a>b$
$\ln\frac{1}{a}=-\ln a$; $\ln ab=\ln a+\ln b$	$e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$
$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$ $(a>0\,;\,b>0)$	$e^{a+b}=e^a.e^b$
$\ln a^x = x\ln a$ $(a>0)$	$e^0=1$; $e^1=e$
$\ln e=1$; $\ln 1=0$; $e\approx 2{,}71$	$(e^a)^n=e^{an}$
$0<a<1$ معناه $\ln a<0$	$a>0$ معناه $e^a>1$
$a>1$ معناه $\ln a>0$	$a<0$ معناه $0<e^a<1$
$\ln e^a=a$	$e^{\ln a}=a$

$(y=\ln x\ ;\ x\in]0;+\infty[)$ يكافئ $(x=e^y\ ;\ y\in R)$

نهايات شهيرة

• $\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$	• $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$
• $\lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$	• $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
• $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$	• $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$
• $\lim_{x\to 0^+} x^n\ln x=0$	• $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}=0$
• $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$	• $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$
• $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}=1$	

تمرين أساسي حل معادلة أو متراجحة لوغارتمية

حل المتراجحة : $\ln x \geq \ln(x-1)+\ln(x+2)$

الحل :

هذه المتراجحة معرفة من أجل $x>0$ و $x-1>0$ و $x+1>0$ أي : $D=]1;+\infty[$

(مجموعة تعريف المتراجحة)

المتراجحة يمكن تبسيطها كما يلي : $\ln x \geq \ln(x-1)(x+2)$

باستخدام خواص الدالةln نحصل على المتراجحة التالية $x \geq (x-1)(x+2)$ بعد النشر و التبسيط $x^2-2 \leq 0$

فيكون : $S=[\sqrt{2};+\infty[$ مجموعة حلول المتراجحة

صورة منحنى بواسطة تحويل نقطي .

المساواة $y=f(x)$ هي معادلة المنحنى C_f في المعلم $(0;\vec{i};\vec{j})$

نوع التحويل النقطي	معادلة C'_f صورة C_f
انسحاب شعاعه $\vec{v}(a;b)$	$y=f(x-\alpha)+\beta$ (أي نعوض x بـ $x-\alpha$ و y بـ $y-\beta$ في معادلة C_f: $(y=f(x)$
التناظر المحوري بالنسبة لمحور الفواصل (xx')	$y=-f(x)$ (أي نعوض y بـ-y و نحتفظ بـ x في معادلة C_f : $(y=f(x)$
التناظر المحوري بالنسبة لمحور التراتيب (yy')	$y=f(-x)$ (أي نعوض x بـ-x و نحتفظ بقيمة y في معادلة C_f: $(y=f(x)$
التناظر بالنسبة إلى المبدأ o	$y=-f(-x)$ (أي نعوض x بـ-x و y بـ-y في معادلة C_f : $(y=f(x)$

مثال توضيحي

C_f معادلته : $f(x)=x^2-1$ في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

معادلة C'_f

- بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-2;3)$ هي :

$y=f(x+2)+3$

$y=(x+2)^2-1+3$

$y=(x+2)^2+2$

- بالتناظر بالنسبة لـ(xx')

$y=-f(x)=-(x^2-1)$

أي : $y=-x^2+1$

- بالتناظر بالنسبة لـ (yy')

$y=f(-x)=(-x)^2-1$

أي $y=x^2-1$

- بالتناظر المركزي بالنسبة للمبدأ o .

$y=-f(-x)=-[(-x)^2-1]$

$y=x^2+1$

المتتاليات

المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
r عدد حقيقي $u_{n+1} = u_n + r \quad (n \in N)$	q عدد حقيقي . $u_{n+1} = q.u_n$
الحد العام	
$u_n = u_0 + n.r$	$u_n = u_0.q^n$
مجموع n حد الأولى	
$s_n = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$	$s_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q} \quad ;(q \neq 1)$
النهايات	
إذا كان : $r > 0$ فإن : $\lim u_n = +\infty$ إذا كان : $r < 0$ فإن : $\lim u_n = -\infty$	* إذا كان : $q > 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ * إذا كان : $-1 < q < 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ * إذا كان : $q \leq -1$ q^n ليست لها نهاية .

حالات خاصة و أمثلة :

1) a و b و c ثلاثة حدود مأخوذة بهذا الترتيب

إذا كانت a و b و c حدود لمتتالية حسابية فإن : $2b = a + c$ ، b وسط حسابي

إذا كانت a و b و c حدود لمتتالية هندسية فإن : $b^2 = a \times c$ ، b وسط هندسي

2) $$1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع (n+1) حد الأولى لمتتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 1

3) $$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

مجموع (n+1) حد الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها q $(q \neq 1)$

دراسة تغيرات المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1} = f(u_n)$

$u_{n+1} = f(u_n)$

↓

إذا كانت f رتيبة

↓

نحسب $u_1 - u_0$

$u_1 - u_0 > 0$	$u_1 - u_0 < 0$
(u_n) متزايدة (نبرهن بالتراجع $u_{n+1} > u_n$)	(u_n) متناقصة (نبرهن بالتراجع $u_{n+1} < u_n$)

تمرين أساسي

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n}$

أدرس تغيرات (u_n).

الحل

نضع : $f(x) = \frac{x}{2+x}$ ، $f'(x) = \frac{2}{(2+n)^2} > 0$

f متزايدة على R^+ و $u_1 = \frac{1}{3}$

لدينا : $u_1 - u_0 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} < 0$.

نبرهن بالتراجع أن (u_n) متناقصة .

التحليل التوفيقي

التبديلات ، الترتيبات ، التوفيقات

$A_n^n = n! = n(n-1)(n-2)...2\times 1$ (عدد التبديلات n عنصرا)

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (عدد الترتيبات k عنصرا من بين n عنصرا)

(عدد التوفيقات k عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا)

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

خواص :

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1;\ \binom{n}{1}=n$$

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p};\ \binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$$

$\binom{n}{k}=\binom{n}{p} \Leftrightarrow p=k$ أو $p=n-k$

المتطابقات الشهيرة في R أو C

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$

$$x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) \quad ,(i^2=-1)$$

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^2-\alpha = (x-\sqrt{\alpha})(x+\sqrt{\alpha}) \quad ,(\alpha>0)$$

ثنائي الحد ، المثلث العددي

a و b عددان حقيقيان ، n عدد طبيعي . $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}.b^k$ ،

المعادلات التفاضلية :

المعادلة	الحلول على $]-\infty;+\infty[$
$y'=f(x)$	$y=g(x)+c$ حيث g دالة أصلية للدالة f و c ثابت اختياري .
$y''=f(x)$	$y=h(x)+\alpha x+\beta$ حيث h دالة أصلية للدالة للدالة الأصلية f ، α و β ثابتان اختياريان .
$y'=ay \quad (a\neq 0)$	$y=\lambda e^{ax}$ حيث λ ثابت اختياري .
$y''+w^2y=0$	$y=a\cos wx+b\sin wx$ حيث a و b ثابتان اختياريان .

مثال توضيحي :

$$(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$$

n=0	1						
n=1	1	1					
n=2	1	2	1				
n=3	1	3	3	1			
n=4	1	4	6	4	1		
n=5	1	5	10	10	5	1	
n=6	1	6	15	20	15	6	1

تمرين أساسي في الاحتمالات :

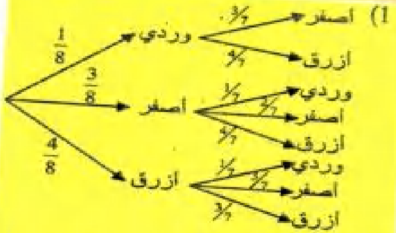
في علبة أقلام ألوان أحمد توجد ثلاثة منها بلون أصفر و أربعة أقلام بلون أزرق و قلم واحد بلون وردي

يأخذ عشوائيا قلمين على التوالي و نسجل الألوان .

1) أنجز شجرة الامكانيات

2) ما هو احتمال الحادث A : " القلمان لهما نفس اللون "

1)



2) الحادث A " القلمان من نفس اللون" يوافق و منه : $P(A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$

الهندسة في الفضاء :

الجداء السلمي

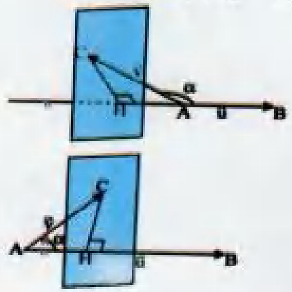
المعلم متعامد و متجانس ، $\vec{U}(u,y,z)$ ، $\vec{V}(x',y',z')$

العبارة التحليلية

$$\vec{U}.\vec{V} = xx'+yy'+zz'$$

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos(\vec{U};\vec{V})$$

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



عبارة الجداء السلمي بالإسقاط

$$\vec{U}.\vec{V} = AB \times AC \times \cos\alpha$$

بعد نقطة عن مستوى :

$A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء .

$(P): ax+by+cz+d=0$ H المسقط العمودي للنقطة A على (P)

$$A_H = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

✓ التمثيل الوسيطي لمستقيم:

الفضاء مستوي إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

التمثيل الوسيطي للمستقيم D الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و شعاع توجيهه $\vec{U}(a;b;c)$

هو الجملة : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ t عدد حقيقي يسمى الوسيط x و y و z هي إحداثيات النقطة

✓ التمثيل الوسيطي لمستوى

التمثيل الوسيطي لمستوى (P) يشمل النقطة $A(x;y;z)$

و شعاعا توجيهه $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ هو

الجملة : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$ $(\lambda;\mu) \in R^2$

خواص الجداء السلمي

- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

تمرين أساسي (هندسة فضائية)

D مستقيم تمثيله الوسيطي $(t \in R)$ $\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = -t+6 \\ z = 3t+2 \end{cases}$

(P) مستوي معادلته $2x - y + z - 4 = 0$

أدرس الوضع النسبي لـ D و (P). (التقاطع /التوازي /الاحتواء)

الحل

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من D فهي تحقق الجملة $\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = -t+6 \\ z = 3t+2 \end{cases}$

لنبحث فيما إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المستوي P أم لا.

M تنتمي إلى P اذا و فقط اذا كان

$$2(-2t+1)-(-t+6)+(3t+2)4=0$$

فنجد $t \times 0 = 6$ و هذا مستحيل أي D و P متوازيان

المعادلة الديكارتية لمستوي

معادلة مستوي شعاعه الناظم $\vec{u}(a;b;c)$	$ax+by+cz+d=0$ (مع $abc \neq 0$)
معادلة مستوي يوازي (xoy)	$z = c$
معادلة مستوي يوازي (yoz)	$x = a$
معادلة مستوي يوازي (zox)	$y = b$

نتمنى لكم كل النجاح و التوفيق