الـــنـــهـــايـــات

① **المـــســـتـــوى:** السنوات الثالثة ثانوي الشعب رياضيات ، تــقــنـي رياضي و علوم تجريبية.

②**الكفاءات المـــستـــهـــدفـــة:**

- ❖ حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود ،المنتهية أو غير المنتهية، لمجالات مجموعة التعريف.
- ❖ حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- ❖ دراسة سلوك التــقاربي لدالة .

③**الـــمـــدة اللازمـــة لهـــذا الـــدرس:** 5 ساعات.

④**الـــدروس الـــواجـــبـــة مراجعـــتها:** الدوال العددية – النهايات.

⑤**المراجـــع الخاصة بهـــذا الـــدرس:** الكتاب المدرسي السنة الثانية و الكتاب المدرسي السنة الثالثة الجزء الأول.

تـــصمـــيـــم الـــدرس

1- مفهوم النهاية .

2- حساب النهاية.

3- المستقيمات المقاربة .

4- نهاية دالة مركبة.

5- النهايات بالمقارنة.

6- أعمل موجهة حول حساب النهايات.

ꕤ مفهوم النهاية ꕤ.

← نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

التمرين 1: *هدفه استعمال تعريف نهاية منتهية للدالة عند $+\infty$أو $-\infty$ المدروسة في السنة الماضية.*

لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بــ: $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$. باستعمال التعريف أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

الحــل:

ليكن $I=]a;b[$ مجال يشمل 0 .

و ليكن x عدد حقيقي من $]-1;+\infty[$ لدينا : $f(x)\in I$ يعني $\dfrac{2}{x+1}<b$ وعليه $\dfrac{x+1}{2}>\dfrac{1}{b}$ أي $x>\dfrac{2}{b}-1$

نستنتج أنه كلما كان x أكبر من $\dfrac{2}{b}-1$ المجال I يشمل $f(x)$ و هذا يعني $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

التمرين 2: *هدفه استعمال تعريف نهاية غير منتهية عند $+\infty$أو $-\infty$ المدروسة في السنة الماضية*

لتكن g الدالة المعرفة على $[2;+\infty[$ بــ: $g(x)=\sqrt{x-2}$. باستعمال التعريف أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

الحــل:

ليكن A عدد حقيقي موجبا و ليكن x من $[2;+\infty[$ لدينا $\sqrt{x-2}>A$ يعني $x-2>A^2$

وعليه $x>A^2+2$ ومنه كلما كان x كبير بقدر كاف كل قيم $g(x)$ تنتمي إلى $[A;+\infty[$

و هذا يعني $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

الــدرس

تــعــاريف

f دالة معرفة على المجال من الشكل $[x_0,+\infty[$ و l عدد حقيقي .

- الكتابة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ تعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.
- الكتابة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ تعني أن كل مجال من الشكل $[A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي .
- الكتابة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ تعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B]$ $(B\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$

✍**التمرين التطبيقي:** تمرين رقم 3 و 4 ص 26 من الكتاب المدرسي الجزء الأول.

←نهاية المنتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

التمرين 1: *هدفه استعمال تعريف نهاية منتهية للدالة عند عدد حقيقي المدروسة في السنة الماضية*

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=2x+1$. باستعمال التعريف أثبت أن $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$

الحــل: ليكن e عدد حقيقي موجب تماما بحيث $0 \le |f(x)-3| \le e$ أي $f(x) \in]3-e;3+e[$

و هذا يعني $0 \le |2x+1-3| \le e$ أي $0 \le |2x-2| \le e$

وعليه $0 \le |x-1| \le \frac{e}{2}$ أي $-\frac{e}{2} \le x-1 \le \frac{e}{2}$ و يكافئ $-\frac{e}{2}+1 \le x \le \frac{e}{2}+1$ أي $x \in \left[-\frac{e}{2}+1;\frac{e}{2}+1\right]$

و هذا يعني أنه إذا كان $x \in \left[-\frac{e}{2}+1;\frac{e}{2}+1\right]$ فإن $f(x) \in]3-e;3+e[$

ومنه عندما يكون من المجال $x \in \left[-\frac{e}{2}+1;\frac{e}{2}+1\right]$ حتما $f(x) \in]3-e;3+e[$

إذاً $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

التمرين 2: *هدفه استعمال تعريف نهاية غير منتهية للدالة عند عدد حقيقي المدروسة في السنة الماضية*

لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـــ: $g(x)=\frac{1}{x-1}$ باستعمال التعريف أثبت أن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = +\infty$

الحــل:

ليكن A عدد حقيقي موجبا و ليكن x من $]1;+\infty[$ لدينا $g(x) > A$ يعني $x-1 > \frac{1}{A}$

وعليه $x > \frac{1}{A}+1$ ومنه كلما كان $0 < x < \frac{1}{A}+1$ فإن $g(x) > A$

ومنه حتى يكون $g(x) > A$ يكفي أخذ x من المجال $\left]0;\frac{1}{A}+1\right[$

و هذا يعني $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

الـــدرس

تـــعـــاريف

f دالة معرفة على المجال $]-\infty;x_0[\cup]x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي .

- الكتابة $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ تعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من العدد x_0 .
- الكتابة $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ تعني أن كل مجال من الشكل $[A;+\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 .

تمرين محلول : رقم 1 و 2 من الكتاب المدرسي ص 11

التمرين التطبيقي : التمرين رقـــم 12 ص 26 من الكتاب المدرسي الجزء 1

حساب النهاية

التمرين 1: هـــدفـــه حساب النهايات للدوال المألوفة المدروسة في السنة الماضية.

حساب النهايات للدوال المألوفة عند أطراف مجموعة تعريفها : $x \mapsto x$ ، $x \mapsto -x$ ، $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto \sqrt{x}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x}$

الحـــل:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$

ملاحظة : هذه النهايات يجب أن تعرف بظاهر القلب.

التمرين 2: هـــدفـــه البحث عن مجموعة التعريف ثم حساب نهاية عند أطراف مجال.

f ، g و h دوال عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = x^3 + 2x + 1$ و $g(x) = \frac{x+1}{2x-4}$

و $h(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{5 - x}$

1. عين مجموعة تعريف لكل من f ، g و h.
2. أحسب نهاية لكل من f ، g و h عند أطراف مجموعة تعريفها

الحـــل:

1. مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty;+\infty[$ ، $D_g =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، $D_h =]-\infty;5[\cup]5;+\infty[$
2. النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} x+1 = 3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} 2x - 4 = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x) = -\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} x+1 = 3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} 2x - 4 = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = -\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} 2x^2 - 3x + 2 = 37$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} 5 - x = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} h(x) = +\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 5} 2x^2 - 3x + 2 = 37$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 5} 5 - x = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 5} h(x) = -\infty$

الــــدرس

1. نهاية للدوال كثيرات الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$

a_n ، b_n عددان حقيقيان غير معدومين و n و p عدد طبيعي.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$

2. نهاية الدوال الناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_0} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_0} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$

التمرين التطبيقي : حل سؤال من كل تمرين من الرقم 18 إلى 20 ص 27 من الكتاب المدرسي الجزء 1

المستــقــيمات المقــاربة

التمرين 1: هدفه تعيين *المستقيمات المقاربة* للدالة عددية درست السنة الماضية

f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-4}$ و $\left(C_f\right)$ المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. أحسب نهاية الدالة f عند أطراف المجموعة D_f استنتج أن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

الحل:

1. $D_f=]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$
2. النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ و $\lim\limits_{\substack{x\to4\\<}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to4\\>}} f(x)=+\infty$

نستنتج أن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=4$ و $y=3$

التمرين 2 : هدفه *اثبات وجود مستقيم مقارب مائل*

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x-3}$

و $\left(C_f\right)$ المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و و Δ مستقيم معادلته $y=-x+2$.

- بين أن لمستقيم Δ إنه مستقيم مقارب للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$.
- أدرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى Δ.

الحــل

- من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x-3}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-3}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-3}=0$ ومنه المستقيم Δ مستقيم مقارب للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

- الوضعية النسبية

لندرس إشارة $f(x)-(-x+2)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x-3}$

- من أجل $x\in]3;+\infty[$ ، $f(x)-(-x+2)>0$ ومنه يقع المنحني $\left(C_f\right)$ فــوق المستــقيم Δ
- من أجل $x\in]-\infty;3[$ ، $f(x)-(-x+2)<0$ ومنه يقع المنحني $\left(C_f\right)$ تحــت المستــقيم Δ

التمرين 3 : هدفه *كيفية البحث عن مستقيم مقارب مائل*

g دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$

و $\left(C_g\right)$ المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- عين بمعادلتها المستقيمات المقاربة للمنحني $\left(C_g\right)$

الحــل

-المستقيمات المقاربــةلدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow[>]{} 1} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow[<]{} 1} g(x)=-\infty$

وحسب هذه النهايات نجد:أن المنحني $\left(C_g\right)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب معادلته x=1

لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ومنه إماكنية وجود مستقيم مقارب مائل

لدينا من جهة $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+3}{x^2-x}=2$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+3}{x-1}=-1$

إذًا $\left(C_g\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2x-1$

نفس النتيجة عند $-\infty$

الـــدرس

– المستقيمات المقاربة :

f دالة عددية معرفة و $\left(C_f\right)$المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ فإن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=l$.

* إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ فإن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=a$.

– المستقيم المقارب المائل:

f دالة عددية معرفة و $\left(C_f\right)$المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و Δ مستقيم معادلته $y=ax+b$.

نقول عن المستقيم Δإنه مستقيما مقاربا مائلا للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$(على الترتيب عند $-\infty$) يعني

* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

البحث عن مستقيم مقارب مائل

f دالة عددية معرفة و $\left(C_f\right)$المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و Δ مستقيم معادلته $y=ax+b$ و $a\neq 0$

يكون المستقيم Δإنه مستقيما مقاربا مائلا للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$(على الترتيب عند $-\infty$) إذا وفقط إذا تحقق ما يلي $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

ملاحظة: لدراسة وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $(D): y=ax+b$ ندرس إشارة $f(x)-(ax+b)$

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية $\left(C_f\right)$ تحت المستقيم (D)

إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية $\left(C_f\right)$ فوق المستقيم (D)

التمرين التطبيقي : التمرين 7 ص 26 و التمرين 16 ص 27.

نهاية دالـــة مـــركبة

التمرين 1: *هـــدفـــه تفكيك دالة مركبة و ايجاد مركب دالتين*

f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ و $[1;+\infty[$ على الترتيب بـــ: $f(x)=2x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$

1. اكتب كلا من f و g على الشكل مركب دالتين مرجعتين يطلب تحديدهما

2. عرّف الدالة $g\circ f$.

الـــحـــل:

1. كتابة

لدينا $\underbrace{x\xrightarrow{u_1}x^2\xrightarrow{v_1}2x^2+1}_{f}$ و $\underbrace{x\xrightarrow{u_2}x^2\xrightarrow{v_2}2x^2+1}_{g}$

ومنه $f=u_1\circ v_1$ حيث $u_1:x\mapsto x^2$ و $v_1:x\mapsto 2x+1$

و $f=u_1\circ v_1$ حيث $u_2:x\mapsto x-1$ و $v_2:x\mapsto \sqrt{x}$

و هذه الدوال دوال مرجعية.

2.تعريف الدالة $g\circ f$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 1$ أي $f(x)\in[1;+\infty[$ ومنه الدالة $g\circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$ و $g\circ f(x)=g[f(x)]=g(2x^2+1)$

ومنه $g\circ f(x)=\sqrt{(2x^2+1)-1}$ و تكافئ $g\circ f(x)=\sqrt{2x^2}$

ومن كون x من المجال $[0;+\infty[$: نجد $g\circ f(x)=\sqrt{2}x$

التمرين 2: *وضعية مشكلة يطلب حساب نهاية دالة مركبة.*

f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;3]$ بـــ: $f(x)=\sqrt{3-x}$

أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$

الـــدرس

– نهايـــة دالـــة مـــركبـــة

مبرهنة a، b و c تمـــثـــل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. ولتكن f، g و h دوال عددية حيث $f=g\circ h$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$ و $\lim\limits_{X\to b}g(X)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$

مثال التمرين أعلاه

لدينا $f(x)=g\circ h$ حيث $h(x)=3-x$ و $g(x)=\sqrt{x}$

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}g(X)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

✍ **التمرين المحلول :** رقم 1 من الكتاب المدرسي ص 15.

✍ **التمرين التطبيقي :** تمرين من الكتاب المدرسي رقم 30 ص 28.

∞ الــنهايات بالمقارنة ∞

التمرين 1: *وضعية مشكلة ومدخل لحساب النهايات بالمقارنة*

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ –بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدومx:
$\frac{-1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ –أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الــحــل:

1. التبيان:نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $-1\le\sin x\le 1$ ومنه $-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ لأن $x^2>0$

إذ ًا من أجل كل عدد حقيقي غير معدومx: $\frac{-1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0$ نستنتج أنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$ إذ ًا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

الــدرس

–النهايات بالمقارنة

المبرهنة 1

l ، α ، b أعداد حقيقية حيث $b\in]-\alpha;\alpha[$. f ، g ، h دوال عددية معرفة

- إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha,+\infty[$: $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$
- إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha,+\infty[$: $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=l'$ فإن $l<\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)<l'$

المبرهنة 2

l ، α ، b أعداد حقيقية حيث $b\in]-\alpha;\alpha[$. f ، g دالتان عدديتان

- إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha,+\infty[$: $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
- و أما إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha,+\infty[$: $f(x)\ge g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
- إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\alpha;\alpha[$: $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to b}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to b}h(x)=l$ فإن $\lim\limits_{x\to b}g(x)=l$

ملاحظة: *تمدد هذه المبرهنة 1 و 2 إلى نهاية عندما يؤول x إلى b حيث $b\in]-\alpha;\alpha[$ أو يؤول x إلى* $-\infty$

التمرين المحلول: رقم 1 و 3 من الكتاب المدرسي ص 15.

التمرين التطبيقي : تمرين 41 و 35 ص 29 و 28.

الأعــمــال المــوجــهــة

إزالــة حالــة عدم التعــيين من الكتاب المدرسي ص 22