الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

كتاب الأستاذ

المؤلفون: محمد فاتح مراد مفتش التربية والتكوين

جمال تاوريرت مفتش التربية والتكوين

محمد قورين مفتش التربية والتكوين

عبد الحفيظ فلاح أستاذ التعليم الثانوي

عبد المؤمن موس أستاذ التعليم الثانوي

غريسي بلجيلالي أستاذ التعليم الثانوي

كتاب الأستاذ

الشعب: • رياضيات

• تقني رياضي

• علوم تجريبية

الجزء الأول

الباب الأول

النهايات و الاستمرارية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح:/

الهدف: مقاربة مفهوم نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهاية منتهية عند حقيقي " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقاربة نهاية دالة مركبة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهايات دالة مركبة " و و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الاستمرارية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مبرهنة القيم المتوسطة و تطبيقاتها.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبرهنة القيم المتوسطة " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

إزالة حالة عدم التعيين

تصحيح: /

الهدف: توظيف النهايات.

توجيهات: يقدم العمل في شكل أفواج .

الحل: بسيط

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

تصحيح: /

الهدف: توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة..

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 (1 $2,9 < f(x) < 3,1$ معناه $2,9(x+1) < 3x-2 < 3,1(x+1)$ لأن $x+1>0$

و منه $2,9(x+1)+2 < 3x < 3,1(x+1)+2$ و منه $2,9x+4,9 < 3x < 3,1x+5,1$

و منه $(3x-3,1x-5,1<0)$ و $(2,9x+4,9-3x<0)$

و منه $(-0,1x<5,1)$ و $(-0,1x<-4,9)$ و منه $\left(x>\frac{5,1}{-0,1}\right)$ و $\left(x>\frac{4,9}{0,1}\right)$ إذن $A=49$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

3) $f(x)-3=\frac{3x-2}{x+1}-3=\frac{-5}{x+1}$

$f(x)-3<0$ و منه C_f أسفل Δ.

11 نحسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]$ ثم لدراسة الوضعية ندرس إشارة $f(x)-y$

ملاحظة: نفس الطريقة مع التمارين 8 ، 9 و 10.

2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

13 $\lim_{x\to4} f(x)=3$ ،

$2,95\le f(x)\le 3,05$ يكافئ $2,95\le\frac{x+2}{x-2}\le 3,05$ و منه $2,95(x-2)-2\le x\le 3,05(x-2)-2$

أي $\left(x\ge\frac{8,1}{2,05}\right)$ و $\left(x\le\frac{7,9}{1,95}\right)$ ، إذن $3,951219512...\le x\le 4,051282051...$

يمكن أخذ $I=\left]3,95;4,05\right[$

14 $\lim_{x\to2} f(x)=+\infty$ ، $f(x)>10^3$ معناه $3x+4>10^3(x-2)^2$ و منه $1000x^2-4003x+3996<0$

و منه $\frac{4003+\sqrt{40009}}{2000}<x<\frac{4003-\sqrt{40009}}{2000}$ و منه $1,901488751<x<2,101511249$.

يمكن أخذ $a=0,1$

3 ـ تتمات على النهايات

18

النهاية	عند $-\infty$	عند $+\infty$
أ)	$-\infty$	$+\infty$
ب)	$-\infty$	$-\infty$
ج)	$+\infty$	$-\infty$

19 أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=+\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=4$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ ، $\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$

20 أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to2} f(x)=+\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$.

21 أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

22 أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to4^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to4^+} f(x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$.

26 أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) من أجل $x>0$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{3-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{3}$$

28 أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

29 **الحالة(1):** $D=\mathbb{R}-\{0;2\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$

الحالة(2): $D=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

الحالة(3): $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ،

$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

4 ـ نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

30 1) $\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{3x+4}{x-3}=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim_{x\overset{>}{\to}3}\sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$

3) $\lim_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}-2x^3+x-3=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+x-3}=+\infty$

31 : لدينا: على $]-2;2[$ $4-x^2>0$ و منه $\lim_{x\to-2}\left(4-x^2\right)=0^+$ و $\lim_{x\to2}\left(4-x^2\right)=0^+$ و $\lim_{X\to0^+}\sqrt{X}=0^+$

إذن $\lim_{x\to-2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$ و $\lim_{x\to2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

32 1) لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

و $\lim_{X\to0}\cos X=1$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)=1$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x-1}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{X\to\frac{\pi}{2}}\cos X=0$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)=0$

3) $\lim_{x\to-1}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\lim_{X\to\frac{\pi}{2}}\sin X=1$ ، إذن $\lim_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=1$

و $\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ و بالتالي : $\lim_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

4) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ و منه $\lim_{x\to0}\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=\pi$ و $\lim_{X\to\pi}\cos X=-1$ ، إذن $\lim_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=-1$

35 لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x)-3=0$ أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

36 دينا $\lim_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$ و بما أن $f(x)\le-2x^3$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

37 لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^4+x\right)=+\infty$ و بما أن $f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

38 1) لدينا $-1\le\cos x\le1$ و منه $-2\le2\cos x\le2$ و منه $1\le3+2\cos x\le5$

2) إذا كان : $x\to+\infty$ فإن $x-1\to+\infty$. $1\le3+2\cos x\le5$ تكافئ $\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\cos x}\le1$

و منه $\frac{x-1}{5}\le\frac{x-1}{3+2\cos x}\le x-1$. لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{5}=\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3+2\cos x}=+\infty$

39 1) $x^2-3\sin x-(x^2-3)=-3\sin x+3=3(1-\sin x)$ بما أن $-1\le \sin x\le 1$ فإن $-1\le -\sin x\le 1$ و
منه $0\le 1-\sin x\le 2$ ، إذن $x^2-3\sin x-(x^2-3)\ge 0$
و بالتالي : $x^2-3\sin x\ge x^2-3$
2) $\lim_{x\to+\infty} x^2-3=+\infty$ و $x^2-3\sin x\ge x^2-3$ فإن $\lim_{x\to+\infty} x^2-3\sin x=+\infty$

40 • عند $+\infty$ $(x>0)$: $-1\le \sin x\le 1$ و منه $-2x\le 2x\sin x\le 2x$ و منه
$x^2-2x\le x^2+2x\sin x\le x^2+2x$
بما أن $\lim_{x\to+\infty} x^2-2x=\lim_{x\to+\infty} x^2+2x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
• عند $-\infty$ $(x<0)$: $-1\le \sin x\le 1$ و منه $2x\le 2x\sin x\le -2x$ و منه
$x^2+2x\le x^2+2x\sin x\le x^2-2x$
بما أن $\lim_{x\to-\infty} x^2+2x=\lim_{x\to-\infty} x^2-2x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

41 1) لدينا : : $-1\le \sin x\le 1$ و منه $x-1\le x+\sin x\le x+1$ و منه $\dfrac{x-1}{2x+1}\le\dfrac{x+\sin x}{2x+1}\le\dfrac{x+1}{2x+1}$
2) بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

5 ـ الاستمرارية

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1 \ ; & x\le 2\\ f(x)=x^2+x-5 \ ; & x>2\end{cases}$
1) $\lim_{x\xrightarrow{<}2} x^2-2x+1=1$ $\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=$ و $f(2)=1$.إذن الدالة f مستمرة عند 2 على اليسار
$\lim_{x\xrightarrow{>}2} x^2+x-5=1$ $\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=$ و $f(2)=1$.إذن الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين
و منه الدالة f مستمرة عند 2 .
2) نعم الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة على $]-\infty;2]$ (كثير حدود) و على $]2;+\infty[$ (كثير حدود) و مستمرة عند 2.

6 ـ مبرهنة القيم المتوسطة

52 1) $f(1)=\dfrac{3}{4}$ ، $f(0)=-\dfrac{1}{4}$ ، $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}$ ، $f(-1)=-\dfrac{5}{4}$
2) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجالات $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ و $[0;1]$.

56 • بما أن f مستمرة و رتيبة تماما على $]-3;0]$ و تأخذ قيمها في $]-2;+\infty[$ و بما أن $0\in]-2;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-3;0]$
• بما أن f مستمرة و رتيبة تماما على $[0;2[$ و تأخذ قيمها في $]-2;4[$ و بما أن $0\in]-2;4[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0;2[$
إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $-3<x_0<0$ و $0<x_1<2$

7 ـ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

64 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=-3x^2+6x$

أ) $f'(x)=0$ معناه $(x=0)$ أو $(x=2)$ ، $f'(x)<0$ معناه $(x<0)$ أو $(x>2)$ ،

$f'(x)>0$ معناه $(0<x<2)$

ب)

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow -1 \nearrow 3 \searrow -\infty$

3) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$

67 نعتبر الدالة $h:x\mapsto f(x)-g(x)$ و نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$

تمارين للتعمق

2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

71 $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$

72 1) $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ و $d=-1$

2) $f(x)=x+1+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$

إذن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y=x+1$

3) ندرس إشارة $f(x)-(x+1)$: $f(x)-(x+1)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

$f(x)-(x+1)=0$ تكافئ $x=-\frac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)<0$ تكافئ $x<-\frac{2}{3}$ ،

$f(x)-(x+1)>0$ تكافئ $x>-\frac{2}{3}$

(C) أعلى Δ في المجال $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ و (C) أسفل Δ في المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.

73 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

2) $\Delta:y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

3) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+5}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=-2$$

ج) نستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا Δ' عند $-\infty$ معادلته $y=-x-2$.

74 1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$

التخمين: (C_f) يقترب من المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ عند $+\infty$ و لكن (C_g) لا يقترب من المستقيم عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ معناه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$

نستنتج أن المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحني (C_g) عند $+\infty$.

3 ـ تتمات على النهايات

82 1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=+\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}1}x+1=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}1}x^2+2x-3=0^+$

و بالمثل : $\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}-3}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-3}f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و كذلك $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2+6x+12\right)=12$$

88 من اجل كل عدد حقيقي x نضع: $g(x)=\sin 3x$ و $h(x)=2\cos x-1$ و $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}=\frac{\dfrac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{2\cos x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ لأن الدالتان g و h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$

لدينا : $g'(x)=3\cos 3x$ و $h'(x)=-2\sin x$

بما أن $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ فإن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\sqrt{3}$

90 (1 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}=0$ و منه لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

إذا كان $x>0$ فإن : $l_1=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}2\times\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}}=2\sqrt{2}$

(2 $l_2=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ، حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$.

نضع: $X=x-\frac{\pi}{2}$ و منه $x=X+\frac{\pi}{2}$. إذا كان $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $X\to 0$

$$l_2=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=\lim_{X\to 0}(\pi-\pi-2X)\tan\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=\lim_{X\to 0}\frac{-2X}{-\tan X}=\lim_{X\to 0}\frac{2}{\frac{\tan X}{X}}=2$$

4 ـ نهاية دالة مركبة ــ النهايات بالمقارنة

101 (1 أولا نعين مجموعة التعريف:

$D_f=\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x : $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا: $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=x-\sqrt{x^2+1}$

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، إذن $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$ أي $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

(2 لدينا $-1\leq\sin x\leq 1$ و منه $0\leq 1+\sin x\leq 2$

و منه $0\leq x(1+\sin x)\leq 2x$ لأن : $x>0$

من : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ينتج $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x\left[x(1+\sin x)\right]$ أي $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-4x^2$ أي

$f(x)<-4x^2$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$. نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

الباب الثاني

الاشتقاقية

الأنشطة

النشاط الأول
تصحيح: /
الهدف: تذكير حول المشتقات.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الاشتقاقية ". و يتم ضمن أفواج.
الحل: يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.
النشاط الثاني
تصحيح: /
الهدف: تعريف الدالة " ظل ".
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة دالة مثلثية " .
الحل: بسيط
النشاط الثالث
تصحيح: /
الهدف: مقاربة مشتقة الدالة المركبة.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " اشتقاق دالة مركبة " و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.
الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

المقارنة بين دوال و دراسة الأوضاع النسبية لمنحنياتها
تصحيح: /
الهدف: توظيف دراسة اتجاه تغير دالة.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

دراسة دالة صماء
تصحيح: /
الهدف: توظيف اتجاه تغير دالة.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

تقريب دالة بواسطة مجدول أو حاسبة
تصحيح: /
الهدف: توظيف طريقة أولر.
توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو أو باستعمال حاسبة بيانية.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية.

1 - الاشتقاقية

2 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{-x}{x}=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x}{x}=1$ إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

6 المنحني يقبل مماسا عند A إذن الدالة تقبل الاشتقاق عند -2 ومعامل توجيه المماس T هو $\frac{3}{2}$ ولدينا $f'(-2)=\frac{3}{2}$

$f(-2)=3$ وبالتالي معادلة المماس T هي $y=\frac{3}{2}(x+2)+3$.

2 - المشتقات والعمليات عليها

12 في كل حالة من الحالات المقترحة الدالة f تعتبر كثير حدود وبالتالي هي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

أ - $f'(x)=5x^4+4x^3-9x^2+2x+4$.

ب - $f'(x)=\frac{6x^2+2x-4}{4}$.

جـ - $f'(x)=6mx^2+6m^3x-m^2$.

د - $f(m)=2x^3+9m^2x^2-2mx+1$.

14 أ - $f(x)=x+x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$. $f'(x)=1+\cos x-x\sin x$

ب - $f(x)=\sin x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$. $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

جـ - $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ؛ $D=\mathbb{R}^*$. $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

3 - اتجاه تغير دالة

25 أ - $f(x)=2x^4-27x+7$ ؛ $f'(x)=8x^3-27=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

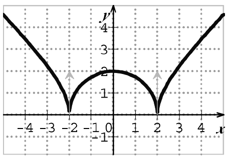
من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $4x^2+6x+9>0$ ومنه إذا كان $x\geq\frac{3}{2}$ فإن $f'(x)\geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ ؛ إذا كان $x\leq\frac{3}{2}$ فإن $f'(x)\leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

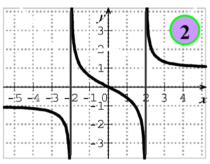
جـ - $f(x)=x+\cos x$. $f'(x)=1-\sin x$ ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $1\geq\sin x$ ومنه $f'(x)\geq 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

هـ - $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}_+$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x}$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

27 الشكل المقابل هو المنحني $\mathcal{C}_f$ لدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من المجموعة $\mathbb{R}-\{-2;2\}$.

المنحني الذي يمثل f' هو





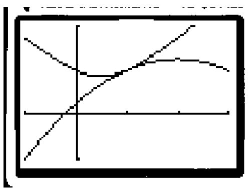
4 ـ اشتقاق دالة مركبة

34 أ) $f'(x)=3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$.

ب) $g'(x)=4(4x+1)(2x^2+x-1)^3$.

ج) $h'(t)=5(3t^2-1)(t^3-t+1)^4$.

د) $t'(u)=-\dfrac{16u}{(u^2+3)^9}$.



39 باستعمال حاسبة بيانية مثّلنا المنحنيين الذين معادلتيهما $y=\sqrt{x^2-x+1}$

و $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4}$.

1) يبدو أن للمنحنيين مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

2) أ ــ الدالة g كثير حدود إذن هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

الدالة $u:x\mapsto x^2-x+1$ تقبل الاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب ــ $f(1)=1$ ، $g(1)=1$ ، $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ و $g'(1)=\dfrac{1}{2}$.

ج ــ معادلة المماس لمنحني الدالة f هي : $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+1$ ونجد نفس المعادلة لمماس منحني الدالة g .

5 ـ التقريب التآلفي

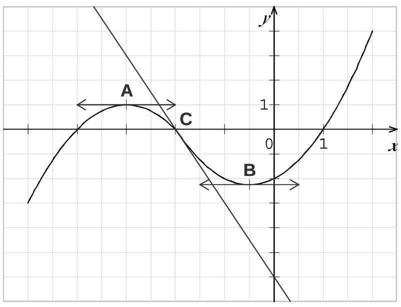
41 برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

أ) $(1+x)^3\approx 1+3x$. لدينا $(1+x)^3=x^3+3x^2+3x+1$ وعندما يقترب x من 0 فيكون x^3 و $3x^2$ قيمتين مهملتين.

يمكن اعتبار معادلة مماس منحني الدالة $x\mapsto(1+x)^3$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=1+3x$.

تمارين للتّعمّق.

1 ـ الاشتقاقية



46

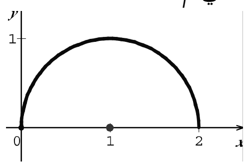
المنحني البياني $\mathcal{C}_f$ التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

1. $D_f=[-5;2]$.

2. $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ و $f'(-2)=\dfrac{0-(-4)}{-2-0}=-2$.

4. عند A ، $y=1$ ؛ عند B ، $y=-\dfrac{9}{4}$ وعند C ، $y=-2(x+2)$.

5. لا توجد مماسات أخرى للمنحني $\mathcal{C}_f$ موازية لمماسه عند النقطة C لأنها هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathcal{C}_f$.



53 f الدالة المعرّفة على المجال $[0;2]$، تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ هو عبارة عن نصف دائرة كما هو مبيّن في الشكل .

1) المماس منطبق على محور التراتيب.

2) نضع $\Omega(1;0)$ ؛ $M(x;y)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ معناه $\Omega M=1$ و $y \geq 0$ أي $(x-1)^2+y^2=1$ و $y \geq 0$ وهذا يعني $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ أي $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

3) نجد بالحساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ غير منتهية .

2 ـ المشتقات والعمليات عليها

58 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f والمماس T عند النقطة A التي فاصلتها 0 .

.1 $y=3x+3$.

.2 يبدو أنه إذا كان $x \in \left[-\frac{5}{2};+\infty\right[$ فإن المنحني يقع فوق المماس .

.3 تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(3x+3)=x^2(x+3)$.

.4 إذا كان $x \in [-3;+\infty[$ فإن $f(x)-(3x+3) \geq 0$ ويكون المنحني فوق المماس ، وإذا كان $x \in]-\infty;-3]$ فإن $f(x)-(3x+3) \leq 0$ ويكون المنحني تحت المماس.

الباب الثالث

الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدالة الأسية ". و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة .

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة اللوغاريتمية "

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط.

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية و مقاربة منحنيات غوص.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

تصحيح: /

الهدف: حل معادلات تفاضلية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دالتا تجب و جيب الزائديتان

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمثيل البياني لدوال مرفقة بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدالة الأسية

3 (1 $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

(2 $e^{-x}-e^{-2x}=\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^{x}-1}{e^{2x}}$

3) تصويب: $(e^{x}+e^{-x})^{2}=(e^{x})^{2}+2e^{x}e^{-x}+(e^{-x})^{2}$

$(e^{x}+e^{-x})^{2}=e^{2x}+e^{-2x}+2$

$(e^{x}+e^{-x})^{2}=e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$

(4 $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2 - الدوال الأسية $x\mapsto e^{kx}$

15 تصويب: $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)\times f\left(y\right)$

1) أ) إذا كان $x=y=0$ فإن: $f\left(0\right)=f\left(0\right)\times f\left(0\right)$ ومنه $f\left(0\right)-\left[f\left(0\right)\right]^{2}=0$

ومنه $f\left(0\right)\left[1-f\left(0\right)\right]=0$ ومنه $f\left(0\right)=1$ لأن f غير معدومة.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x: $f\left(x\right)\times f\left(-x\right)=f\left(x-x\right)$

ومنه $f\left(x\right)\times f\left(-x\right)=f\left(0\right)$ أي $f\left(x\right)\times f\left(-x\right)=1$

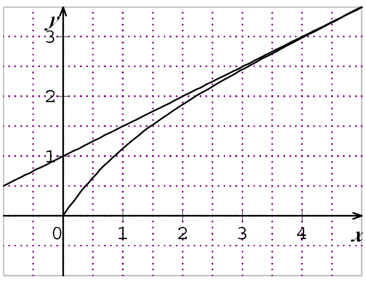
2. أ- من أجل كل عدد حقيقي x، $f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(x\right)$

ب) الدالة f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

3 - دراسة الدالة الأسية

f دالة معرفة على $\left[0;+\infty\right[$ كما يلي:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$



1.أ) $f'\left(x\right)=\frac{1}{2}+e^{-x}$ الدالة f متزايدة تماما على $\left[0;+\infty\right[$.

ب) $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$.

2.أ) $\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)=0$

معادلة المستقيم المقارب D هي: $y=\frac{1}{2}x+1$.

ب) المنحني $\left(C\right)$ أسفل المستقيم D.

3. الرسم (انظر الشكل)

51 .1 $g(x)-f(x)=e^{-x}(1-\sin x)$

$\sin x=1$ على $[0;\pi]$ معناه $x=\frac{\pi}{2}$.إذن المنحنيان يشتركان في النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

.2 $f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$ و $g'(x)=e^{-x}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ إذن المنحنيان يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا.

4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

61 $P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$

1) $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) $P(x)=0$ معناه أو $(x=-2)$ أو $(x=3)$

3) $x\in\left\{e^{\frac{1}{2}};e^{-2};e^{3}\right\}$

4) $x\in\left\{\ln\frac{1}{2};\ln 3\right\}$

5 - الخواص الجبرية

73 2) $\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\frac{x}{y}=-\ln 3\end{cases}$ مجوعة الحلول هي $S=\{(-8;-24),(2;6)\}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=\ln 60\end{cases}$ مجوعة الحلول هي $S=\{(5;12),(12;5)\}$

74 1) $2t^2-5t+2=0$ معناه $t\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

2) مجموعة حلول الجملة هي: $S=\{(-\ln 2;\ln 2),(\ln 2;-\ln 2)\}$

6 - دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

91 $f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$

$$f'(x)=\frac{3}{x+2}+2x-3=\frac{2x^2+x-3}{x+2}$$

$f'(x)=0$ تكافئ $2x^2+x-3=0$

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=1)$ أو $\left(x=-\frac{3}{2}\right)$

إذن المنحني C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين التين فاصلتاهما 1 و $\frac{3}{2}$

7- دالة اللوغاريتم العشري

98 1. $\log\left(2^{1234}\right)=1234\log 2$. $E\left(1234\log 2\right)=371$.

2. من $E\left(\log n\right)=371$ نستنتج أن: $371\le \log n<372$

ومنه $\log 10^{371}\le \log n<\log 10^{372}$ و منه $10^{371}\le n<10^{372}$

3. الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 372 رقما.

8- المعادلات التفاضلية

102 1) $f(x)=\lambda e^{3x}$ ، 2) $f(x)=\lambda e^{-2x}$

3) $f(x)=\lambda e^{-\frac{5}{2}x}$ ، 4) $f(x)=\lambda e^{8x}$

103 1) $f(x)=\lambda e^{-\frac{1}{2}x}$

2) الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(\ln 4\right)=1$ هو

$$f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$$

تمارين للتعمق

108 1) تصويب: المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $-\infty$.

$\left(a,b,c\right)=\left(2,-3,1\right)$

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.المنحني (C) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=1$ كمقارب عند $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $f'(x)=e^{x}\left(4e^{x}-3\right)$

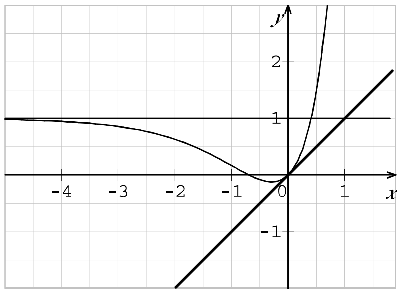
x	$-\infty$		$\ln\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و $-\ln 2$.

•معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y=x$.

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

د) الرسم



116 1) أ) $f\left(x\right)-\left(x-1\right)=x-\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}-x+1\ =\dfrac{2}{e^{x}+1}$

$$f\left(x\right)-\left(x+1\right)=-\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}-1=\dfrac{-2e^{x}}{e^{x}+1}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(x-1\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(x+1\right)=0$

إذن المستقيمان Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتاهما على مقاربان لـــ$\left(C\right)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

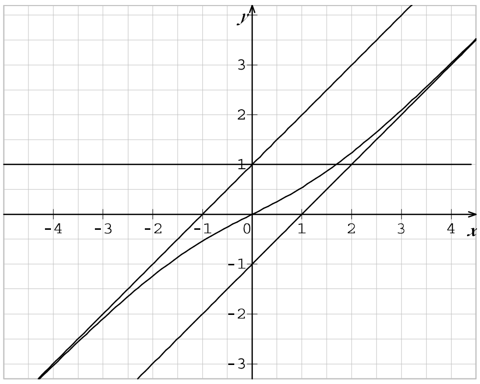
د) بجوار $+\infty$ $\left(C\right)$أعلى Δ_2 ، و بجوار $-\infty$ $\left(C\right)$ أسفل Δ_1 .

2) أ) $f(-x)=-x-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=-f(x)$

ب) $f\,'(x)=1-\dfrac{2e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\dfrac{2e^{x}+1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f\,'(x)$	$+$
f	0 $\nearrow$ 1 $\nearrow$ $+\infty$

3) الرسم



117 (1

2.أ) الدالة f متزايدة.

ب) الدالة f تنعدم عند $x=0$.

3.أ) من أجل $x>-1$: $f\,'(x)=2x-2,2+\dfrac{2,2}{x+1}=\dfrac{2x^{2}-0,2x}{x+1}$

إشارة $f\,'(x)$ هي من نفس لإشارة $x\left(2x-0,2\right)$

$f'(x)>0$ معناه $x\in]-1;0[\cup]0,1;+\infty[$ ، $f'(x)<0$ معناه $x\in]0;0,1[$ ، $f'(x)=0$ معناه $x\in\{0;0,1\}$

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\approx -0,0003$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

جـ) لدينا $f(0)=0$ و على المجال $]0,1;+\infty[$ الدالة f مستمرة و متزايدة و تأخذ قيمها في $]f(0,1);+\infty[$

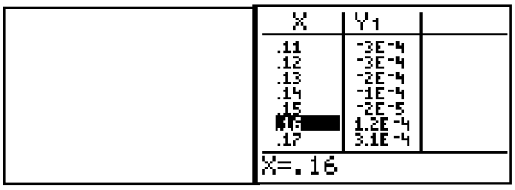
و $f(0,1)<0$.إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $f(x_0)=0$

خلاصة: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين 0 و x_0 .

د) نتائج دراسة الدالة لا تتطابق مع التخمين.

4.أ) يمكن أخذ $-0,0018\le y\le 0,00111$

ب) $f(0,15)<0$ و $f(0,16)>0$ ومنه $0,15\alpha<0,16$.قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2} للعدد α هي $0,16$



121 1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x : $-1\le\cos 4x\le 1$ و $e^{-x}>0$ ومنه .

$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) النقط المشتركة للمنحنيين Γ و C هي النقط $M_k\left(k\dfrac{\pi}{2};e^{-k\frac{\pi}{2}}\right)$

3) أ) $u_{n+1}=e^{-n\frac{\pi}{2}}\times e^{-\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}u_n$.المتتالية (u_n) هندسية أساسها $e^{-\frac{\pi}{2}}$

ب)أساس المتتالية (u_n) $0<e^{-\frac{\pi}{2}}<1$ و $u_0=1$.إذن المتتالية (u_n) موجبة و متزايدة و تتقارب نحو 0.

4) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

تصويب: $f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$

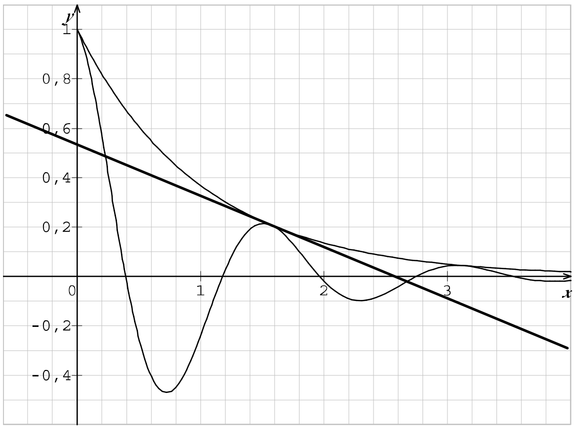
ب) $g'(x)=-e^{-x}$.إذا كان $x=k\dfrac{\pi}{2}$ فإن $\cos 4x=1$ و $\sin 4x=0$

$f'\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)=g'\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)=-e^{-k\frac{\pi}{2}}$

إذن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5) لدينا: $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T للمنحني Γ عند النقطة التي فاصلتها

$\frac{\pi}{2}$ هي $-0,2$.



مسائل

123 1) المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر، $f(-x)=\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}=f(x)$ إذن الدالة f زوجية

2) الدالة $x \mapsto e^{x}$ متزايدة على $\mathbb{R}$.من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $-x \le x$ ومنه $e^{-x} \le e^{x}$.

3) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

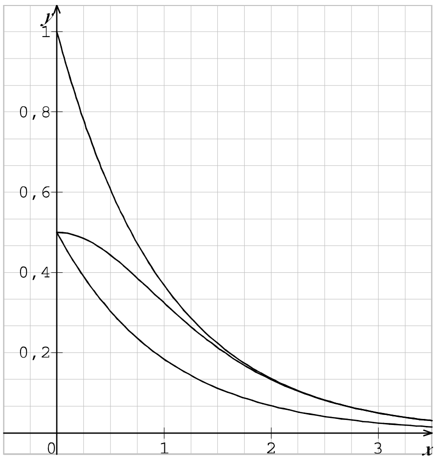
ب) $f'(x)=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$.من أجل كل $x \ge 0$: $e^{x} \ge e^{-x}$ و منه $f'(x)<0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad\qquad$ $-$
f	$\frac{1}{2}$ $\searrow$ 0

4) أ) من أجل كل $x \ge 0$: $0<e^{-x} \le e^{x}$ ومنه $0<e^{x}<e^{-x}+e^{x} \le 2e^{x}$ ومنه $\frac{1}{2e^{x}} \le \frac{1}{e^{-x}+e^{x}} \le \frac{1}{e^{x}}$

إذن :من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $h(x) \le f(x) \le g(x)$.

ب) نستنتج أنه على $\mathbb{R}^{+}$ ، Γ يكون بين Γ_1 و Γ_2 .



الباب الرابع

التزايد المقارن

الأنشطة

النشاط الأول
تصحيح: /
الهدف: تعريف قوى عدد حقيقي موجب.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قوى عدد حقيقي موجب ".
الحل: بسيط
النشاط الثاني
تصحيح: /
الهدف: مقاربة مفهوم الجذر النوني.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة الدوال $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ "
الحل: بسيط
النشاط الثالث
تصحيح: /
الهدف: مقارنة كل من $\ln x$ و e^x مع x^n "
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التزايد المقارن " و يتم ضمن أفواج.
الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

دراسة دالة لوغاريتمية
تصحيح: /
الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط
مسألة استمثال
تصحيح: /
الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط
مقارنة الأعداد n^{n+1} **و** $(n+1)^n$
تصحيح: /
الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الدوال $x \mapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
تصحيح: /
الهدف: توظيف الدوال الأسية و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط
نموذج ديموغرافي

تصحيح: /
الهدف: توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

فاتورة الهاتف
تصحيح: /
الهدف: توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - قوى عدد حقيقي موجب تماما

4

$$a = 9^{\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{4}} = \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$a = 3^3 \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{3+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{15}{4}}$$

$$b = 3^{-\frac{5}{4}} \times 81^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{65}{12}}$$

$$c = \left(3^{-4}\right)^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{7}{3}}$$

7

1) $12^x = 3$ تكافئ $e^{\ln 12^x} = e^{\ln 3}$

تكافئ $e^{x\ln 12} = e^{\ln 3}$

تكافئ $x\ln 12 = \ln 3$

تكافئ $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 12}$

2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \dfrac{1}{8}$ تكافئ $x = \dfrac{\ln 8}{\ln 4}$

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 3$ تكافئ $x = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

4) $5^{x-1} = 2^x$ تكافئ $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$

5) $3^x = 4^{2x+1}$ تكافئ $x = \dfrac{\ln 4}{\ln \dfrac{3}{16}}$

6) $5^{1-3x} = \dfrac{1}{125}$ تكافئ $x = \dfrac{4}{3}$

12

4) $5^{-x} < 5^{2x}$ تكافئ $-x\ln 5 < 2x\ln 5$ تكافئ $x \in \left]0; +\infty\right[$

5) $\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}$ تكافئ $\frac{2.2^x-1}{3\left(2^x+1\right)}<0$ تكافئ $2^{x+1}<1$ تكافئ $x\in\left]-\infty;-1\right[$

6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\le 2$ تكافئ $-x\ln\sqrt{2}\le\ln 2$ تكافئ $-\frac{1}{2}x\le 1$ تكافئ $x\in\left[-2;+\infty\right[$.

2 - دراسة الدوال: $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

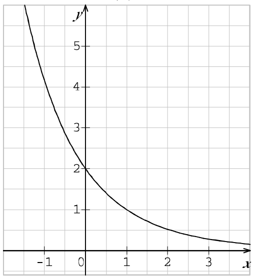
38 1) $2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\frac{2^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}=1$

$2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$

2) $f\left(x\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ ، $f'\left(x\right)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{2}{5}}\right)+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{3}{5}}\right)$

$f'\left(x\right)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^x$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ ↘ 0



3 - التزايد المقارن

40 1) $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2+1-e^x$

$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{x}{x^2}=+\infty$

47 1) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2xe^x-e^x=0$

2) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{2x}}=0$

52 1) أ) $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^2}=0$

ب) $\lim_{x\to0}f\left(x\right)=\lim_{x\to0}\frac{3^x}{x^2}=+\infty$

2) $f\left(x\right)=\frac{3^x}{x^2}=\frac{e^{x\ln3}}{x^2}=\frac{e^{x\ln3}\times\left[\ln3\right]^2}{x^2\left[\ln3\right]^2}=\frac{e^{x\ln3}}{\left[x\ln3\right]^2}\times\left[\ln3\right]^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x\ln 3}}{[x\ln 3]^2} \times [\ln 3]^2 = +\infty$ بوضع $X = x\ln 3$.

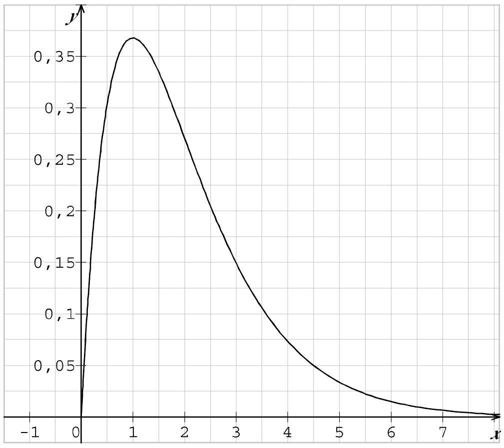
تمارين للتعمق

61 الجزء1: 1) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ب) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ جـ)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

جـ)



2) أ) المستقيم الذي معادلته $y = m$ يقطع المنحني (Γ) في نقطتين.إذن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.

ب) $f(0,3573) \approx 0,2499$ و $f(0,3574) \approx 0,25001$

جـ) $f(x) = 0$ تكافئ $x = 0$ و $f(x) = \frac{1}{e}$ تكافئ $x = 1$

الجزء2: تصويب: $u_0 = \alpha$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1) أ) $u_0 = \alpha$ و $\alpha > 0$ و إذا كان $u_n > 0$ فإن $u_n e^{-u_n} > 0$ و منه $u_{n+1} > 0$.إذن $u_n > 0$.

ب) $u_{n+1} - u_n = u_n\left(e^{-u_n} - 1\right)$

بما أن $u_n > 0$ و $e^{-u_n} < 1$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ و بالتالي (u_n) متناقصة

جـ) (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بـــ0 فهي متقاربة.لتكن ℓ نهايتها.

لدينا $\ell = \ell e^{-\ell}$ تكافئ $\ell = 0$

2. $w_n = \ln u_n$. $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ ومنه $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n$

ومنه $w_{n+1} = w_n - u_n$ أي $u_n = w_n - w_{n+1}$

ب) $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2) + (w_{n-1} - w_n) + (w_n - w_{n+1}) = w_0 - w_{n+1}$

جـ) بما أن u_n يؤول إلى0 ، w_n يؤول إلى $-\infty$، إذن S_n يؤول إلى $+\infty$.

3) $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$ و $f(\beta) = \frac{1}{4}$ إنّ إذا أخذنا $v_0 = \beta$ ، ابتداءً من الرتبة1 يكون $u_n = v_n$.

62 1) المستقيم D يمر بالنقطتين $J(0;1)$ و $K(-1;0)$ معادلته $y = x+1$

2) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+p) = 0$

أي أن المستقيم الذي معادلته $y = mx + p$ مقارب للمنحني عند $+\infty$ و هو المستقيم D. إذن $m = p = 1$.

ب) النقطة J مركز تناظر للمنحني.

جـ) $f(x) = x+1+\varphi(x)$ ، $f(-x) = -x+1+\varphi(-x)$

ومنه $f(x) + f(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$ و نعلم أن $f(x) + f(-x) = 2$ ،إذن $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ومنه الدالة φ فردية

د) $f(x) + f(-x) = 2$ و منه $f'(x) - f'(-x) = 0$ ومنه $f'(x) = f'(-x)$. إذن f' زوجية.

3) أ) $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ ومنه $\varphi(-x) = (-ax+b)e^{-x^2}$ ،

بما أن الدالة φ فردية يكون $-ax+b = -ax-b$ و منه $b = 0$

ب) $f(x) = x+1+\varphi(x) = x+1+axe^{-x^2}$ ومنه $f'(x) = 1+\varphi'(x) = 1+a(1-2x^2)e^{-x^2}$

جـ) معامل توجيه المماس T عند النقطة التي فاصلتها0 (النقطة J) هو $f'(0) = 1-e$

$f'(0) = 1+a$ معناه $1-e = 1+a$ أي $a = -e$

د) $f(x) = x+1+axe^{-x^2} = x+1-exe^{-x^2}$

64 الجزء1: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

1) $g'(x) = e^x - 1$. $g'(x)$ موجبة إذا كان $x \geq 0$ و سالبة إذا كان $x \leq 0$

إذن الدالة g متزايدة إذا كان $x \geq 0$ و متناقصة إذا كان $x \leq 0$ و $g(0) = 0$ و بالتالي $g(x) \geq 0$.

2) $g(x) \geq 0$ معناه $e^x - x \geq 1$ أي $e^x - x > 0$

الجزء2:

1) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

ب) عند $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$ و عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$.

2) أ) $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{\left(e^x - x\right)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0

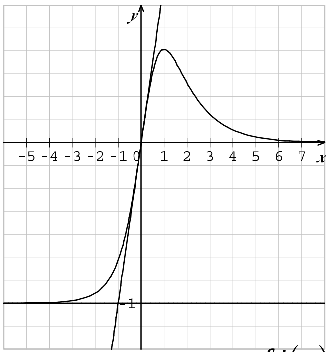
3) أ) معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y = x$.

ب) وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماسT : $f(x)-x=\dfrac{-xg(x)}{e^{x}-x}$.

بما أن $g(x)\geq 0$ و $e^{x}-x>0$ فإن إشارة $f(x)-x$ هي من إشارة $(-x)$

في المجال $]-\infty;0[$ (C) أعلىT و في المجال $]0;+\infty[$ (C) أسفل T .

4)



66 .1 $f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}$

$f'(x)>0$ إذا كان $-1<x<1$

$f'(x)<0$ إذا كان $x<-1$ أو $x>1$

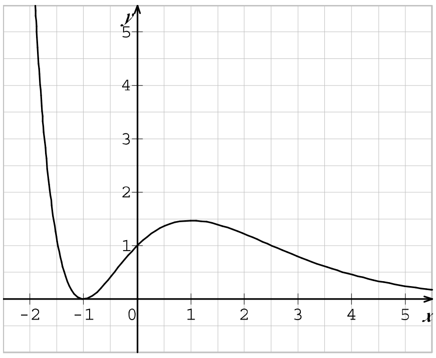
$f'(x)=0$ إذا كان $x=-1$ أو $x=1$

إذن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[-1;1]$ و متناقصة تماما في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$

.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2}e^{-x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x^{2}}}=0$ المنحني (C) يقبل

مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ عند $+\infty$

.3التمثيل البياني:



.4أ) إذا كان $k<0$ المعادلة لا تقبل حلولا.

- إذا كان $k=0$ المعادلة تقبل حلا واحدا $x=-1$

- إذا كان $0<k<\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل 3 حلول.

- إذا كان $k=\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلين أحدهما $x=1$

- إذا كان $k>\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلا واحدا

ب) – إذا كان $x > -1$ فإن $f(x) \le \frac{4}{e}$ و بالتالي $f(x) < 2$. إذن المعادلة $f(x) = 2$ ليس لها حل على المجال $[-1;+\infty[$

– إذا كان $x < -1$ فإن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]0;+\infty[$. بما أن 2 ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$ فإنه توجد قيمة وحيدة x تحقق $f(x) = 2$

$f(-1) = 0$ و $f(-2) \approx 7,39$

بما أن $0 < 2 < 7,39$ فإن $-2 < \alpha < -1$

جـ) نعلم أن $f(\alpha) = 2$ و منه $(\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$ ومنه $(\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha}$

ومنه $\left(\alpha+1 = \sqrt{2e^{\alpha}}\right)$ أو $\left(\alpha+1 = -\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$

بما أن $\alpha < -1$ فإن $\alpha = -1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

68 1) أ) $f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

2) $f(1) = 0$ و $f'(1) = 1$ إذن معادلة T هي $y = x-1$

3) $g(x) = x-1-f(x)$

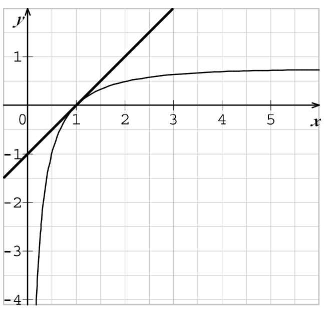
أ) $g'(x) = 1-f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x + 2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$

ب) $g'(1) = 0$، و إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x + 2\left(x\sqrt{x}-1\right)$

- على $]0;1[$: $\ln x < 0$ و $x\sqrt{x}-1 < 0$ ومنه $g'(x) < 0$
- على $]1;+\infty[$: $\ln x > 0$ و $x\sqrt{x}-1 > 0$ ومنه $g'(x) < 0$.

جـ) $g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	



نستنتج من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x) \ge 0$

د) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، (C) أسفل T.

4) الرسم(انظر الشكل)

73 **الجزء الأول:** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

.1 $h'(x)=e^x\left(x+1\right)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	$1-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	

من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)\geq 1-\dfrac{1}{e}$ أي $h(x)>0$ من أجل x من $\mathbb{R}$.

.2 تصويب: $g(x)$ بدلا من $h(x)$

أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$

ب) $g'(x)=1-e^x$

x	$-\infty$	β		0		α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$		0		$-$	
g	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

جــ) نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

د) إذا كان $x\in\left]-\infty;\beta\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ فإن $g(x)<0$ و إذا كان $x\in\left]\beta;\alpha\right[$ فإن $g(x)>0$

الجزء الثاني: دراسة تغيرات الدالة f و رسم المنحني $\mathscr{C}$:

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

.2أ) $f'(x)=\dfrac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(xe^x+e^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(2-e^x+x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

ب) جدول التغيرات

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) أ) $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}=\alpha+2$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

ب) تصويب : عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ $\quad 1,14<\alpha<1,15$ و منه $2,14<\alpha+1<2,15$

ومنه $\frac{1}{2,15}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2,14}$ أي $0,465<f(\alpha)<0,467$ (الصر سعته 2×10^{-3})

4.معادلة المماس T هي $y=x$

أ.5) $f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{e^x-1-x^2e^x-x+xe^x-xe^x}{xe^x+1}$

$$f(x)-x=\frac{x\left(e^x-xe^x-1\right)+\left(e^x-xe^x-1\right)}{xe^x+1}=\frac{\left(e^x-xe^x-1\right)(x+1)}{xe^x+1}$$

ب) $u'(x)=-xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي من نفس إشارة $(-x)$

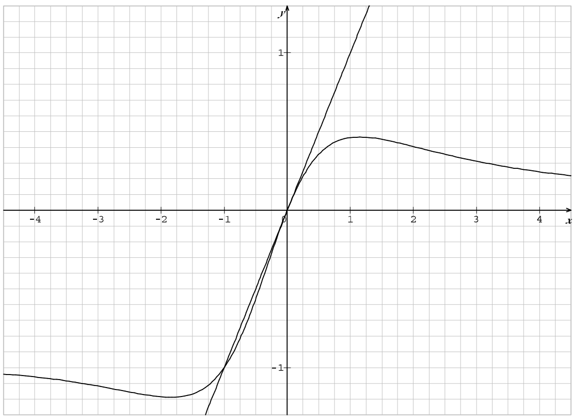
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	−	
u		↗	0	↘	

إشارة $u(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)\leq 0$

جـ) إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $-(x+1)$

(C) أعلى T في المجالين $]-\infty;-1[$ و $]0;+\infty[$ و (C) أسفل T في المجال $]-1;0[$

6) الرسم



الباب الخامس

الدوال الأصلية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدوال الأصلية ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: إعطاء دلالة لمفهوم الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج مباشرة بعد النشاط الأول.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: إبراز وحدانية الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا..

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج مباشرة بعد النشاط الثاني .

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دراسة دالة أصلية

تصحيح: /

الهدف: إبراز إمكانية (في بعض الحالات) دراسة تغيرات دالة أصلية دون تعيين عبارتها بدلالة المجهول.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تعيين دوال أصلية لدالة

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج .

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدوال الأصلية

1 نبين أن $F'(x)=f(x)$

2 1) الدالة الأصلية للدالة f هي H 2) الدالة الأصلية للدالة f هي H

3) الدالة الأصلية للدالة g هي K 4) الدالة الأصلية للدالة h هي F

5) الدالة الأصلية للدالة k هي G

2 ـ حساب الدوال الأصلية

22 5) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3=-\frac{1}{2}\left[-2e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3\right]$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto-\frac{1}{8}\left(e^{-2x}+2\right)^4+c$ حيث c ثابت حقيقي.

23 5) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{(\ln x+2)^2}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto-\frac{1}{\ln x+2}+c$ حيث c ثابت حقيقي

25 5) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\times\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto4\sqrt{e^x-1}+c$ حيث c ثابت حقيقي

27 4) $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+1}=3\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto3\ln\left(x^2+x+1\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

28 4) $f(x)=\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto-3e^{\frac{1}{x}}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

29 3) $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3+1}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto\frac{1}{6}\ln\left(x^3+1\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

30 3) $f(x)=\sin x\cos x$

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{2}(\sin x)^2$ أو الدالة $G:x\mapsto-\frac{1}{2}(\cos x)^2$

3 ـ المعادلات التفاضلية

31 1) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c$ 2) $y=x^2+x+\frac{1}{x}+c$

3) $y'=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$ و $y=x-\frac{1}{x}+c$ 4) $y=-\frac{3}{2}cs(2x)+c$ ، c ثابت حقيقي

تمارين تطبيقية

44 $f(x)=\sin x\left(a\cos^2 x+b\cos^4 x\right)$

$$f(x)=\sin x\left(\sin^2 x\cos 2x\right)$$
$$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$
$$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$$
$$F(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$$

48 1) $u'(x)=\dfrac{\cos^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$ ،

$$u'(x)=\frac{\cos^2 x+3\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$$

2) $v(x)=\dfrac{1}{3}\left[u'(x)+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right]$

الدوال الأصلية للدالة v على $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ معرفة بـ $x\mapsto\dfrac{1}{3}\left[u(x)+2\tan x\right]+k$ حيث k ثابت حقيقي

بما أن $V(0)=0$ فإن $k=0$ و $V(x)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}+2\tan x\right]$.

37 .1 $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^3}$

.2 مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدوال من الشكل:

$x\mapsto-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x+1)^2}+k$ حيث k ثابت حقيقي

.3 $F(0)=1$ معناه $-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(0-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(0+1)^2}+k=1$ أي $k=\dfrac{3}{2}$

و بالتالي $F(x)=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{2}$

43 .1 $f(x)=\sin x+\sin^3 x=\sin x\left(1+\sin^2 x\right)=\sin x\left(2-\cos^2 x\right)=2\sin x-\sin x\cos^2 x$

.2 $F(x)=-2\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x$

44 .1 $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x=\sin x\left(\sin^2 x\cos^2 x\right)$

$$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$
$$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$$

.2 $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+\dfrac{1}{5}\cos^5 x$

45 .1 $f(x)=\sin^4 x\cos^5 x=\cos x\left(\sin^4 x\cos^4 x\right)$

$$f(x)=\cos x\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2=\cos x\left(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x\right)$$

.2 $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x$

46 .1 $f'(x)=4\cos x\sin^3 x$ و $f''(x)=-4\sin^4 x+12\cos^2 x\sin^2 x$

.2 $f''(x)=-4f(x)+12\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x$

$f''(x)=-4f(x)+12\sin^2 x-12\sin^4 x$

$f''(x)=-16f(x)+12\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$f''(x)=-16f(x)-6\cos 2x+6$ ومنه $f(x)=-\frac{1}{16}f''(x)-\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}$

.3 نستنتج أن الدالة $F:x\mapsto -\frac{1}{16}f'(x)-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

أي $F(x)=-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

47 تصويب : $f(x)=\tan^{2004} x+\tan^{2006} x$

يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right)\tan^{2004} x$ و هي من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=\tan x$

و هي مستمرة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن دالتها الأصلية على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هي $F(x)=\frac{1}{5}\tan^{2005} x$

57 $f(x)=e^x\cos x$

.1 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ وَ $f''(x)=e^x(-2\sin x)$

.2 $f(x)=af''(x)+bf'(x)$ معناه $\left(a=-\frac{1}{2}\right)$ و $(b=1)$

إذن $f(x)=-\frac{1}{2}f''(x)+f'(x)$

.3 نستنتج أن الدالة $F:x\mapsto -\frac{1}{2}f'(x)+f(x)$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

أي $F(x)=\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

58 $F(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}$

$F'(x)=\left(2ax^3+(2b+3a)x^2+(2c+2b)x+2d+c\right)e^{2x}$

من اجل كل عدد حقيقي x : $F'(x)=f(x)$ معناه $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ و $\left(b=-\frac{3}{4}\right)$ و $\left(c=\frac{3}{4}\right)$ و $\left(d=-\frac{3}{8}\right)$

$F(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}$

الباب السادس

الحساب التكاملي

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: الربط بين مساحة حيز تحت منحن لدالة موجبة على مجال و الدوال الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: العلاقة بين دالة أصلية و مساحة حيز.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج و يتوج بتقديم الفقرة " توظيف الحساب التكاملي لتعيين دوال أصلية ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دالة معرفة بتكامل

تصحيح: /

الهدف: توظيف تعريف التكامل و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

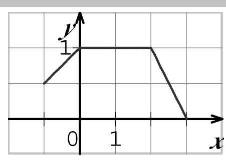
الحل: بسيط

التمارين

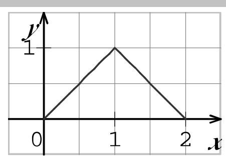
تمارين تطبيقية

1 - تكامل دالة

3



$I = \frac{13}{8}$



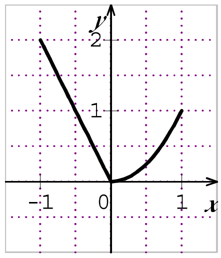
$I = 1$

4

1. انشاء المنحني $\mathcal{C}$.

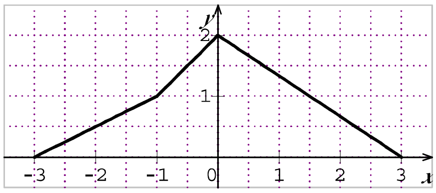
2. نعم الدالة f مستمرة على $[-1;1]$

3. $I = \int_{-1}^{0} -2x\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx \quad I = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$



5

.1



.2 نعم f مستمرة على $[-3;3]$.

.3 $I=\int_{-3}^{-1}(0.5x+1.5)dx+\int_{-1}^{0}(x+2)dx+\int_{0}^{3}(-\frac{2}{3}x+2)dx$

6 • .1 $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ .... $(*)$

$(*)$ تكافئ: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ و $y-1\geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها $\omega(1;1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$ واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 1$.

.2 تكامل الدالة f هو $I=\sqrt{2}\left(\pi+2\right)$

• .1 $y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ: $x^2+y^2=4$ و $y\geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 0$.

.2 تكامل الدالة f هو $I=2\pi$.

7 $\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=8$ ، $\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=7$ ، $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=4$.

10 (1 $\int_{1}^{2}2x\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\right]_{1}^{2}=\frac{3}{2}$

(2 $\int_{1}^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\left(\sqrt{10}-1\right)$ ، (3 $\int_{3}^{4}\frac{5x}{\left(x^2-2\right)^3}dx=\frac{5}{56}$ ، (4 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x dx=1$

11 $\int_{0}^{1}(3x-6)\left(x^2-4x+1\right)^3dx=\left[\frac{3}{8}\left(x^2-4x+1\right)^4\right]_{0}^{1}$ ،

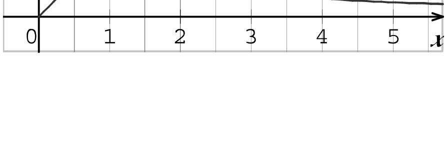
$\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=\left[2\sqrt{1+t}\right]_{0}^{3}=4-2=2$ ،

$\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+1}dt=\left[\frac{1}{4}\ln\left(t^4+1\right)\right]_{1}^{2}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{17}{2}\right)$ ،

$\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

2 ـ خواص التكامل

32



$$I=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}+\ln 3$$

$$J=\int_2^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_2^1 \frac{1}{x}\,dx+\int_1^{\frac{1}{2}} x\,dx=-\ln 2-\frac{3}{8}$$

3 - القيمة المتوسطة

36 $f(x)=2x+3$ ، $\mu=3$

$f(x)=|x|$ ، $\mu=0$

37 1) من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2};1\right]$ لدينا: $\ln x>\ln\frac{1}{2}$ و منه $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq -\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^1 dx$ أي $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq -\frac{\ln 2}{2}$

2) من أجل كل x من $[1;2]$ لدينا: $\frac{1}{1+x^3}\leq\frac{1}{2}$ و منه $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx\leq\frac{1}{2}\int_1^2 dx$ أي $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx\leq\frac{1}{2}$

3) من أجل كل x من $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ لدينا: $-1\leq\sin(x^2+1)\leq 1$ ومنه $-\frac{\pi}{2}\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x^2+1)dx\leq\frac{\pi}{2}$

44 1) من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا:

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^3}\leq 1$ ومنه $\frac{1}{2}\leq\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq 1$

2) على المجال $[0;9]$ الدالة: $f:x\mapsto\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ متناقصة تماما، إذن من أجل كل x من $[0;9]$:

$f(9)\leq f(x)\leq f(0)$ و منه $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 1$ أي: $\frac{9}{4}\leq\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\leq 9$

45 1) على المجال $[1;2]$ الدالة: $f:x\mapsto\sqrt{x^3+1}$ متزايدة تماما،

إذن من أجل كل x من $[1;2]$: $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ ومنه $\sqrt{2}\leq f(x)\leq 3$ أي: $\sqrt{2}\leq\int_1^2\sqrt{x^3+1}\,dx\leq 3$

2) من أجل كل x من $[0;2]$: $e^{-4}\leq e^{x^2}\leq 1$ ومنه $2e^{-4}\leq\int_0^2 e^{-x^2}\,dx\leq 2$

3) من أجل كل x من $[2;4]$: $\ln 3\leq\ln(x^2-1)\leq\ln 15$ ومنه $2\ln 3\leq\int_2^4\ln(x^2-1)\,dx\leq 2\ln 3+2\ln 5$

46 تصويب: 1. باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحني C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

2.على المجال $[4;12]$، المنحني C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A=\int_4^{12} f(x)\,dx$

بما أن $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\le f(x)\le \frac{1}{2}x+2$ فإن: $\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx \le \int_4^{12} f(x)\,dx \le \int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـــ $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـــ: $G(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـــ $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ هي الدالة H المعرفة بـــ: $H(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx = G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx = H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

49 1) $\int_1^4 f(x)\,dx=3\mu=6$ ، 2) $\int_1^3 f(x)\,dx=2\mu=2\ln 2$ ،

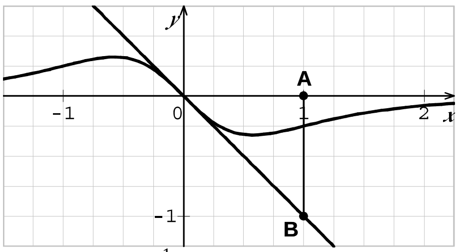
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{74}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\mu=\frac{1}{2}$

51 1) من أجل كل x من $[n;n+1]$: $\frac{1}{n}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n+1}$ ومنه $\frac{1}{n}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$.

2) حسب مبرهنة الحصر (I_n) متقاربة و تتقارب نحو 0.

4 ـ التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

59



$A_1=\int_0^1 -\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ ومنه $A_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ ومنه $A_1=\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^1$ أي $A_1=\frac{1}{4}$

2) أ− معادلة المماس T للمنحني (C) عند المبدأ هي: $y=-x$

ب−المنحني (C) أسفل T في المجال $]-\infty;0]$ و (C) أعلى T في المجال $[0;+\infty[$.

ج− المساحة A_2 للمثلث المحدد بـــ T ، محور الفواصل و المستقيم D هي $A_2=\frac{1}{2}u.a$.

3) $A=A_2-A_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}u.a$

4) أ− $I(\lambda)=-\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}$

$$I(\lambda)=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}=\frac{1}{2(\lambda^2+1)}-\frac{1}{2}$$

ب- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=-\frac{1}{2}$.

عندما يؤول λ إلى $+\infty$ ، مساحة المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل تقترب من $(-A_2)$ حيث A_2 مساحة المثلث OAB .

5 ـ توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

71 .1 $I+J=\frac{\pi^2}{8}$.

2.أ- $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$

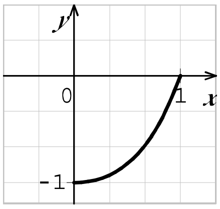
ب- نضع: $u(x)=x$ و $v'(x)=\cos 2x$ ومنه $u'(x)=1$ و $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$I-J=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$ ومنه $I-J=\frac{1}{2}$

.3 $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)$ و $J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)$

6- بعض تطبيقات الحساب التكاملي

73 $a=\int_0^1 -(x-1)e^x dx$



$a=\left[(2-x)e^x\right]_0^1=e-2$

2) $v=\int_0^1 \pi\left[(x-1)e^x\right]^2 dx=\pi\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)e^{2x} dx$

$v=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1$ ، $v=\pi\frac{e^2-5}{4}u.v$

تمارين للتعمق

86 .1 $J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$

.2 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ ومنه $I=1-J=1-\frac{1}{2}\ln 3$

87 1) مجموعة النقط M هي ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها r واقعة في الربع الأول.

2) . $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}r^2$ ، $\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}r^2$

97 1. من اجل كل x من $[0;1]$: $\frac{1}{1+e} \le \frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}$ و $e^{nx} > 0$ و منه $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2. بالمكاملة على المجال $[0;1]$ نجد :

$\frac{e^n - 1}{(1+e)n} \le u_n \le \frac{e^n - 1}{2n}$ ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$\frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} \le \frac{u_n}{e^n} \le \frac{1-e^{-n}}{2n}$،حسب مبرهنة الحصر يكون $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$.

مســـائل

112

الجزء A :

1. $f(0) = 1$ و $g(0) = 0$ إذن C_g هو الذي يمر بمبدأ المعلم.

2. الدالتان f و g زوجيتان.

3.نقتصر الدراسة على $\mathbb{R}^+$.

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ، $g'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	1 $\searrow$ 0

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (بوضع $X = -x^2$)

4. $f(x) - g(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$

C_f أعلى C_g إذا كان $-1 < x < 1$ و C_f أسفل C_g إذا كان $x < -1$ أو $x > 1$ ، C_fيقطع C_g عند النقطتين اللتينفاصلتاهما-1 و 1.

الجزءB : $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

1. G هي الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند0.

2.الدالة g موجبة تماما على $]0;+\infty[$.من أجل $x > 0$ ، $G(x)$ هو مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ حيث $0 \le a \le x$ و $0 \le b \le g(x)$.

3. الدالة G متزايدة على $\mathbb{R}$.

4.الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، إذن مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$ هي :

أي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\left[f(x) - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}\right]$. g .

G و F لهما نفس المشتقة على $\mathbb{R}$. $G(0) = 0$ و $\frac{1}{2}[F(0) - 0] = 0$. إذن $G(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$

5.أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(-x^2e^{-x^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ ،إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$.

ب- $N = \int_0^1 (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt$ و $f(t) > g(t)$ على المجال $[0;1]$ .N هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين C_f و C_g و محور التراتيب.

جــ-نضع من أجل كل $x \geq 1$:

D_1 : مساحة الحيز المحدد بالمنحني C_f ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

D_2 : مساحة الحيز المحدد بالمنحني C_g ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

$D_3(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq f(x)$.

$D_4(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq g(x)$.

إذا كانت F و G دالتان أصليتان للدالتين f و g على $\mathbb{R}^+$ و $F(0) = G(0) = 0$

$\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = F(x) - G(x)$ و $\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = \int_0^1 (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt + \int_1^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt$

أي $\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = D_2 - D_1 - \left(D_4(x) - D_3(x)\right)$

$$\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = N - \left(D_4(x) - D_3(x)\right)$$

بما أن من أجل كل $x \geq 1$: $D_4(x) - D_3(x) \geq 0$ يكون : $N \geq F(x) - G(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - G(x) = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$

إذن $N \geq \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - G(x)$ أي $N \geq \frac{\ell}{2}$.

ملاحظة: $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt = \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt + + \int_1^x [f(t) - g(t)]dt$

ومنه $\int_1^x [f(t) - g(t)]dt = \int_0^x [f(t) - g(t)]dt - \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$

من أجل كل $x \geq 1$: $f(x) < g(x)$ فيكون $\int_1^x [f(t) - g(t)]dt < 0$ ومنه $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$

ومنه $F(x) - G(x) < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$ و بالتالي $\frac{\ell}{2} < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$ ومنه $\frac{\ell}{2} < \int_0^1 \left[(1 - t^2)e^{-t^2}\right]dt$

الباب السابع

الإحتمالات الشرطية

الأنشطة

النشاط الأول :

تصحيح: B " ثلاثة أوجه و ظهر أو ثلاثة ظهور و وجه "

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- التعرف على تجربة برنولي.

النشاط الثاني :

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول الى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.

النشاط الثالث :

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- توظيف المتغير العشوائي المستمر لحل مسائل في الاحتمالات.

النشاط الرابع :

- استعمال نتائج محاكاة من أجل قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي.

النشاط الخامس :

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- التعرف على أن دالة معرفة على مجال هي كثافة احتمال.
- حساب قانون احتمال متغير عشوائي يقبل دالة f ككثافة احتمال و حساب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري .
-

الأعمال الموجهة (1)

I) محاكاة مرجعية : بإتباع الخطوات المبينة على المجدول اكسال تتحصل على إجابة بالمحاكاة للنشاط رقم 2 .

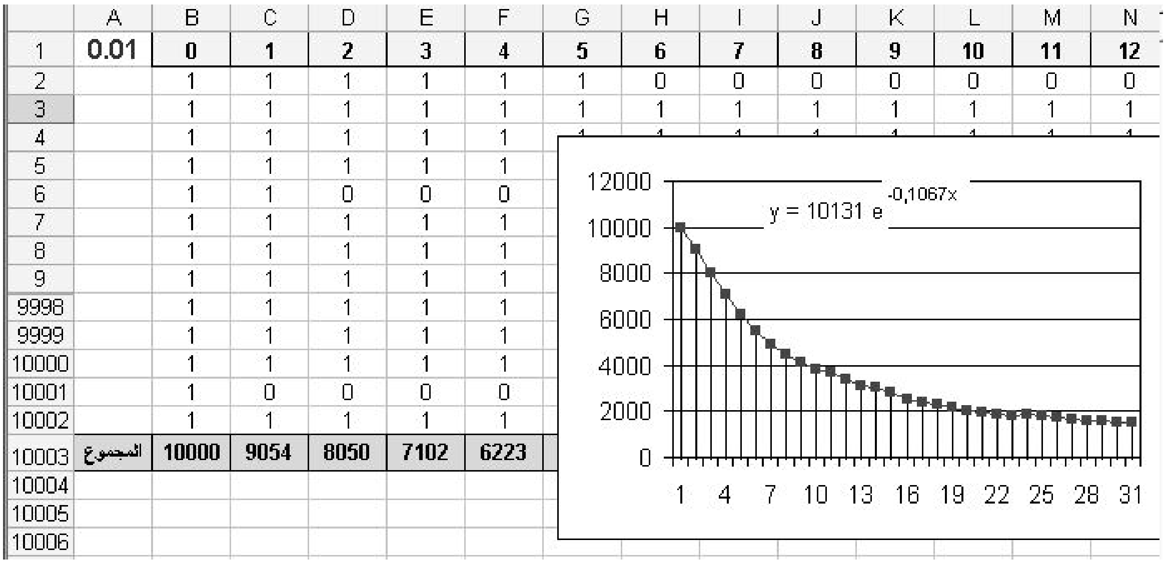
II) إنشاء مثلث :

- تخصيص ثلاثة أعمدة متجاورة لتوليد الأعداد العشوائية x ، y ، z التي تمثل أطوال أضلاع المثلث (مثلا : 100 قيمة لكل ضلع)
- العمود الرابع يخصص للتحقق من شرط وجود المثلث (1 : المثلث موجود ، 0 : المثلث غير موجود) و ذلك بالتعليمتين SI و ET .
- في العمود الخامس نحسب احتمال تحقق مثلث (في الخلية 23 من هذا العمود D مثلا نكتب = SOMME(D1:D23)/23
- بالضغط على الزر F9 نلاحظ التغيرات الحاصلة و يمكنك استخراج قيمة استقرار التواترات .

الأعمال الموجهة (2) :

تعديلات : - في الخطوة الثانية إدخال قيم الزمن t وهي 0 ، 1 ، 2، 3 ، ... في الحيز A2:AG2 بدل الحيز A2:A32

- في الخطوة الرابعة التعليمة هي (SI(ALEA()<A1;0;B2 = و ذلك في الخلية C2 ثم نعمم على العمود C
- في الخلية D2 نكتب التعليمة ((SI(C2=0;0;SI(ALEA()<A1;0;B2 = لأنه إذا ماتت الذرة في لحظة ما بالضرورة هي ميتة في اللحظ الموالية . ثم نعمم محتوى الخلية D2 على كل العمود و محتويات العمود D علة الأعمدة المتبقية . و نواصل حسبما ذكر في الكتاب سنحصل على:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	0.01	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1	1	1	1	1								
5		1	1	1	1	1								
6		1	1	0	0	0								
7		1	1	1	1	1								
8		1	1	1	1	1								
9		1	1	1	1	1								
9998		1	1	1	1	1								
9999		1	1	1	1	1								
10000		1	1	1	1	1								
10001		1	0	0	0	0								
10002		1	1	1	1	1								
10003	المجموع	**10000**	**9054**	**8050**	**7102**	**6223**								
10004														
10005														
10006														

التمارين

3 (1 $p = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$

2) نعلم أن " احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي " يساوي " احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم فردي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم زوجي "

لدينا إذن $p + p' + p' = 1$ و منه $p' = \frac{1-p}{2} = \frac{5}{16}$

(3 $p = 0$ و $p' = \frac{1}{2}$

15 (1 $k = \frac{1}{2}$

(2 $p(X \geq \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}$

(3 $\int_0^{\pi} xf(x)dx = \frac{\pi}{2}$

31 1) نضع S الحادثة " الثلاجة فيها عيب التلحيم " ، E الحادثة " الثلاجة فيها عيب الكتروني "
D الحادثة " الثلاجة غير صالحة " لدينا $p(S) = 0,03$ ، $p(E) = 0,02$

$$P(D) = p(S \cup E) = p(S) + p(E) - p(S \cap E)$$
$$= p(S) + p(E) - p(S) \times p(E) = 0,0494$$

2)أ) عرض 800 ثلاجة في السوق يمكن اعتباره تجربة عشوائية ذات مخرجين " ثلاجة صالحة " و " ثلاجة غير صالحة "
إذن X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه 800 و 0,0494
إذن من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 0 و 800 ينتج