$$p(X=k)=C_{800}^{k}(0,0494)^{k}\times(0,9506)^{800-k}$$

ب) $E(X)=800\times0,0494=39,52$

3) أ) نعتبر Y المتغير العشوائي المساوي لعدد الثلاجات غير الصالحة ضمن الثلاجات 25 المشتراة

إذن Y يتبع قانون ثنائي حد وسيطاه 25 و 0,0494

$$p(Y=2)=C_{25}^{2}(0,0494)^{2}\times(0,9506)^{23}$$

ب) نعتبر Z المتغير العشوائي المساوي لعدد الثلاجات غير الصالحة ضمن n ثلاجة مشتراة

إذن Z يتبع قانون ثنائي حد وسيطاه n و 0,0494 . نبحث عن n حيث $p(Z\geq1)\leq\frac{1}{2}$

ينتج $1-p(Z\prec0)\leq\frac{1}{2}$ و منه $1-p(Z=0)\leq\frac{1}{2}$ أي $p(Z=0)\geq\frac{1}{2}$

و بالتالي $0,9506^{n}\geq\frac{1}{2}$ و منه $n\leq\frac{-\ln 2}{\ln(0,9506)}\simeq13,68$

و عليه ، فعلى التاجر أن يشتري 13 ثلاجة على الأكثر .

4) نعتبر W المتغير العشوائي المرفق لمدة صلاحية الثلاجة دون أي عطب فهو يتبع قانون أسي و سيطه 0,0007

لدينا $p(700\leq W\leq1000)=\int_{700}^{1000}f(x)dx$

$$=e^{-0,49}-e^{-0,7}\simeq0,116$$

(الفروع ب / ج / د غير تابعة لهذا التمرين)

الباب الثامن

قوانين الإحتمال

الأنشطة

النشاط الأول :
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط الثاني :
- إيجاد قانون احتمال لمغير عشوائي
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط الثالث :
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء .

النشاط الرابع :
- ـ تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط الخامس :
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط السادس :
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين .
- توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من كيس .

الأعمال الموجهة (1)

I) تاريخ الميلاد

$$P_n(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^{34}}{365^{365}} \simeq 1 - 0,205 \simeq 0,795$$

يوجد حوالي % 80 من الفرص لوجود تلميذين على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد

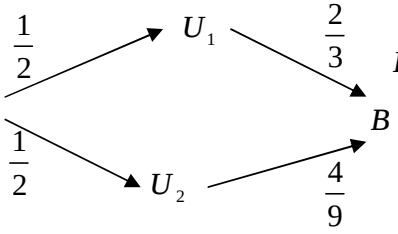
n	**15**	**20**	**23**	**30**	**50**	**57**
P_n	25 %	41 %	50 %	70 %	97 %	99 %

تطبيق : لتكن A " كل قطعة تحوي حبة لؤلؤ على الأقل "

* الجدول التالي يبين الحالات المختلفة لعدد حبات اللؤلؤ في كل قطعة

القطعة 1	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
القطعة 2	**0**	**3**	**0**	**1**	**2**	**0**	**2**	**0**	**1**	**1**
القطعة 3	**3**	**0**	**0**	**2**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**1**

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ A}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$



2) استعمال الشجرة

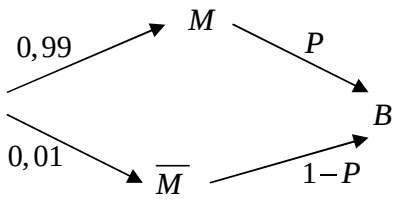
$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$P(U_1 \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(U_1 / B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5}$$

تطبيق :اختبار الكشف عن مرض :

نضع : T " الاختبار موجب " ، M " الشخص مريض "

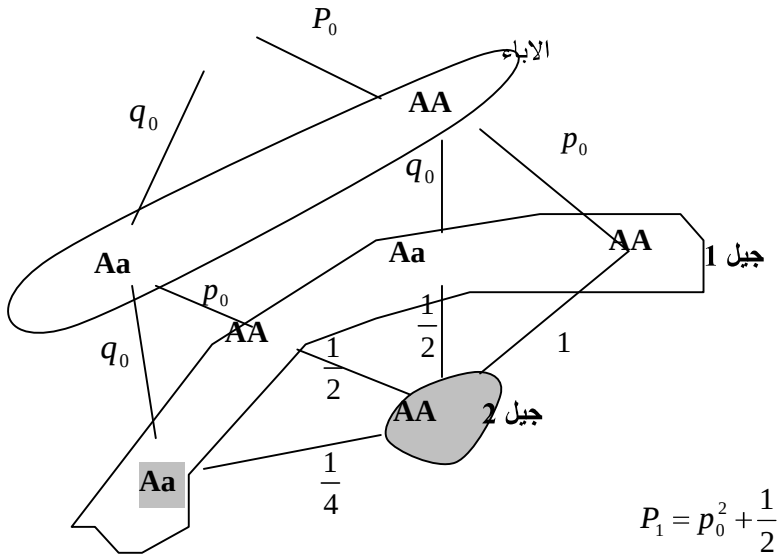


$$P(T) = 0,99 \times p + 0,01 \times (1-p)$$
$$= 0,98p + 0,01$$

$$P(M / T) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,99p}{0,98p + 0,01} = \frac{99p}{98p + 1}$$

الأعمال الموجهة (2)



علم الوراثة :

حسب الشجرة (المخطط) المقابلة لدينا

$$P_1 = p_0^2 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{4}q_0^2 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$$

بالمثل نجد $r_1 = \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$

و نستنتج أن $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$

2) و بما أن $\alpha = p_0 - r_0$ ينتج $q_0 = 1 - p_0 - r_0$

و منه $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2} - p_0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$ بالمثل نجد $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

ملاحظة : $p_1 - r_1 = \alpha = p_0 - r_0$

وبالتالي $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$

لاحظ أن : $p_0 + q_0 + r_0 = 1$ ، $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ ..... و هكذا

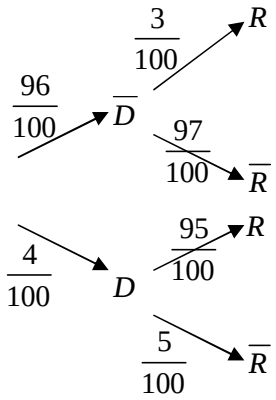
و مادام $\alpha = p_1 - r_1 = p_0 - r_0$ فبالنسبة للجيل الثاني يمكن التعبير عن $r_2; p_2; q_2$ بدلالة α مع $\alpha = p_1 - r_1$

الخلاصة :

تبقى النتائج ثابتة من أجل أس جيل أي $r_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$ ، $q_n = \frac{1-\alpha^2}{2}$ ، $p_n = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$

مفاتيح USB :

نضع D " مفتاح USB غير صالح " ، R " وحدة الفرز ترفض مفتاح USB "



لدينا $p(D) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ و منه $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = \frac{24}{25}$

و أيضا $p_{\overline{D}}(R) = \frac{3}{100}$ و منه $p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 1 - p_{\overline{D}}(R) = \frac{97}{100}$

و أيضا $p_D(R) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$ و منه $p_D(\overline{R}) 1 - p_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{1}{20}$

و نلخص هذه النتائج كما يلي على الشجرة

1) أ) $p_1 = p(D \cap \overline{R}) = p(D) \times p_D(R) = \frac{1}{500} = 0,002$

$p_2 = p(R \cap \overline{D}) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{18}{625} = 0,0288$

$p_3 = p(\overline{D} \cap R) + p(\overline{R} \cap D) = p_2 + p_1 = \frac{77}{2500} \simeq 0,031$

ب) $p_4 = p(\overline{R}) = p(D) \times p_D(\overline{R}) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{2333}{2500} \simeq 0,933$

2) حسب قانون برنولي و من أجل تحقق الحادثة R ، k مرة من بين n محاولة لدينا

$p(R) = C_n^k \left[p(R)\right]^k \times \left[p(\overline{R})\right]^{n-k}$

و منه $p_5 = C_5^1 p(R) \times \left[p(\overline{R})\right]^4 \simeq 0,249$ و بالمثل ينتج $p_6 \simeq 0,708$; $p_7 = 1 - p_5 - p_6 \simeq 0,044$

التمارين

6

$P(F)$	$P(\overline{F})$	$P_F(B)$	$P_F(\overline{B})$	$P_{\overline{F}}(B)$	$P_{\overline{F}}(\overline{B})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

9 1) أ) $p(X \leq 10) = 1 - e^{-0,08(10)} = 1 - e^{-0,8} \simeq 0,55$

ب) $p(X \geq 30) = 1 - p(X \prec 30) = 1 - (1 - e^{-0,08(30)}) = e^{-2,4} \simeq 0,09$

2) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 12,5$

25- للانتقال من O الى A ينبغي على العنكبوت سير 4 خطوات اثنتان في اتجاه $\vec{i}$ و اثنتان في اتجاه $\vec{j}$ و بترتيب الخطوات الأربعة تنتج المسارات المطلوبة و التي عددها $C_4^2 = 6$

- للانتقال من B(4 ; 3) الى C(5 ; 6) ينبغي على العنكبوت سير 4 خطوات ، 1 = 4 - 5 خطوة في اتجاه $\vec{i}$ و 6 – 3 = 3 خطوة في اتجاه $\vec{j}$ و عليه عدد المسارات من B الى C هو $C_4^1 = 4$

و عليه تكون النتائج كمايلي

السؤال	1	2	3	4	5
عدد المسارات	$C_4^2 = 6$	$C_7^3 = 35$	$C_{11}^5 = 462$	$C_4^2 \times C_7^3 = 210$	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_4^1 = 72$

37

1) $a = \frac{13}{60}$ 2) $P(X \geq \frac{5}{2}) = p(X \geq 3) = \frac{5}{12}$ **3)** $P(X \prec 1) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$

4) $P(X^2 - 6X + 8 \prec 0) = p\left[(X-4)(X-2) \prec 0\right] = p(2 \leq X \leq 4) = \frac{2}{3}$

65

1) $p(F) = 1 - \frac{12}{100} = \frac{88}{100} = 0,88$ ، $p_{\overline{F}}(\overline{L}) = 0,2$ ، $p_F(\overline{L}) = 0,08$

2) أ) $p(\overline{F} \cap \overline{L}) = p(\overline{F}) \times p(\overline{L}) = 0.2 \times 0.12 = 0.024$

ب) $p(\overline{F} \cap L) = p(\overline{F}) \times p(L) = 0.88 \times 0.08 = 0.0704$

ج) $p(\overline{F}) = p(\overline{F} \cap L) + p(\overline{F} \cap \overline{L}) = 0,024 + 0,0704 = 0.0944$

3) $p_{\overline{F}}(\overline{L}) = \frac{p(\overline{F} \cap \overline{L})}{p(\overline{F})} = \frac{0,024}{0,0944} \simeq 0,25$

4) أ) $p(F \cap L) = 1 - (0,024 + 0,0704 + 0,0964) = 0,8096$

ب) $p = 1 - (0,8096)^{20} \simeq 0,985$

كتاب الأستاذ

الشعب:• رياضيات

• تقني رياضي

• علوم تجريبية

الجزء الثاني

الباب الأول

المتتاليات العددية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مبدأ الاستدلال بالتراجع.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبدأ الاستدلال بالتراجع " و يتم إنجازه ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل:

1)

A	B	C
العدد الفردي n	مجموع الأعداد الفردية	جذر المجموع
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12
25	169	13
27	196	14
29	225	15
31	256	16
33	289	17
35	324	18
37	361	19
39	400	20
41	441	21
43	484	22
45	529	23
47	576	24

49	625	25
51	676	26
53	729	27
55	784	28
57	841	29
59	900	30
61	961	31
63	1024	32
65	1089	33
67	1156	34
69	1225	35
71	1296	36
73	1369	37
75	1444	38
77	1521	39
79	1600	40
81	1681	41
83	1764	42
85	1849	43
87	1936	44
89	2025	45
91	2116	46
93	2209	47
95	2304	48
97	2401	49
99	2500	50

2) $1+3+...+55=784=28^2$.

3) $1+3+...+87=1936=44^2$.

4) $1+3+...+(2n-1)=\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)^2=n^2$.

5) نضع $A=1+3+...+(2n-1)+(2n+1)$

إذن $A=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$.

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم الفقرة " تذكير حول المتتاليات " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

الحل:

1.A)

u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
15000	17250	19837,5	22813,13	26235,09	30170,36	34695,91

2) ليكن n عددا طبيعيا ، $u_{n+1}=u_n+0,15u_n=1,15u_n$ ؛ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها 1,15 وحدها الأول $u_1=15000$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=15000\times1,15^n$.

4) ابتداء من $n=5$ يكون $u_n>25000$.

1.B)

v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
15000	16500	18000	19500	21000	22500	24000

2) ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=v_n+1500$ ؛ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1500 وحدها الأول $v_1=15000$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n=1500n+15000$.

4) ابتداء من $n=8$ يكون $v_n>25000$.

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم متتالية محدودة من الأعلى.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " متتالية محدودة ... " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو لملاحظة التقارب.

الحل:

A. 1) $D_f = [-6;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -6} \dfrac{f(x)-f(-6)}{x+6} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -6} \dfrac{\sqrt{x+6}}{x+6} = +\infty$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق على يمين -6؛ و (C_f) يقبل مماسا موازيا لمنحى $\vec{j}$ عند النقطة ذات الفاصلة -6 .

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) لدينا $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$ ومن أجل كل x من المجال $]-6;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $[-6;+\infty[$.

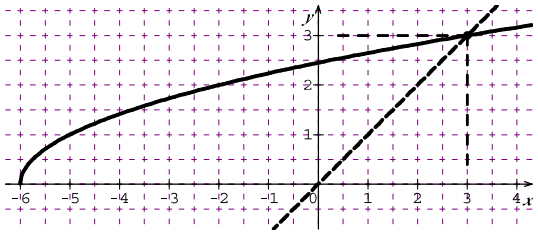
5)

x	-6	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

6) $\sqrt{x+6} = x$ معناه $x^2 - x - 6 = 0$ ؛ $\Delta = 25$ ؛ $x' = -2$ ؛ $x' = 3$

بما أن $x \in D_f$ فإن تقاطع (C_f) و (Δ) هو النقطة ذات الإحداثيتين $(3;3)$.

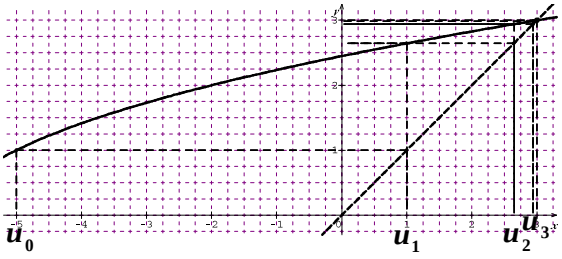
7)



B. 1) $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} = f(u_n)$ ، لدينا $u_1 > 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، إذا كان $u_n \in]0;+\infty[$ فإن $f(u_n) \in]0;+\infty[$

2) استعمال $TI\ 83\ plus$.

3)



4) تبدو المتتالية (u_n) متزايدة.

5) من الجواب 2) تبدو المتتالية (u_n) أنها تقترب من **3** .

6) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 6}{\sqrt{6+u_n} + u_n}$ ؛ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\sqrt{6+u_n} + u_n > 0$.

و $0 < u_n < 3$ إذن $-2 < u_n < 3$ ومنه $-u_n^2 + u_n + 6 > 0$.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم متتاليتين متجاورتين.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " متتاليتان متجاورتان " و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو قصد ملاحظ اتجاه تغير كل من المتتاليتين و تقاربهما.

الحل:

يمكن اعتبار الدالتين f و g المعرفتين على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ ؛ $g(x)=\frac{3x+10}{x+2}$.

1) لدينا $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) لدينا $g'(x)=\frac{-4}{(x+2)^2}$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{n+1}-\frac{3n+10}{n+2}$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=3-3=0$.

4) نلاحظ أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=3$

الأعمال الموجهة

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$

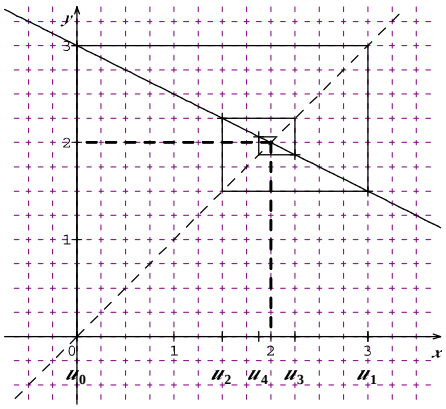
الهدف: دراسة اتجاه تغير و تقارب متتالية من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل:

1. 1) المتتالية (u_n) ليست رتيبة وتبدو أنّها تتقارب نحو 2.

2)



3) $x=-\frac{1}{2}x+3$ معناه $x=2$. إذن $\alpha=2$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}-2=-\frac{1}{2}u_n+1$ أي :

$v_{n+1}=-\frac{1}{2}(v_n+2)+1=-\frac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) هندسية.

لدينا $-1<-\frac{1}{2}<1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n+2=2$.

2. 1) إذا كان $a=0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=b$.

ومنه إذا كان $u_0=b$ فإن (u_n) ثابتة وإذا كان $u_0\neq b$ فإن (u_n) تكون ثابتة ابتداء من الحد الثاني.

2) إذا كان $a=1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n+b$. إذن المتتالية (u_n) حسابية أساسها b.

3) $a\neq0$ و $a\neq1$.

• الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و (Δ) تستنتج من إشارة العبارة $(a-1)x+b$.

إذا كان $a \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ فإن :

(Δ) يقع فوق (D) لما يكون $x \in \left]-\infty;\frac{-b}{a-1}\right[$ ؛

و (Δ) يقع أسفل (D) لما يكون $x \in \left]\frac{-b}{a-1};+\infty\right[$.

إذا كان $a \in]1;+\infty[$ فإن :

(Δ) يقع أسفل (D) لما يكون $x \in \left]-\infty;\frac{-b}{a-1}\right[$ ؛

و (Δ) يقع فوق (D) لما يكون $x \in \left]\frac{-b}{a-1};+\infty\right[$.

• $\alpha = \frac{-b}{a-1}$.

• ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{b}{a-1}$ أي $v_{n+1} = au_n + b + \frac{b}{a-1} = a\left(v_n - \frac{b}{a-1}\right) + \frac{ba}{a-1}$ معناه $v_{n+1} = av_n$

إذن (v_n) هندسية أساسها a.

4) $u_{n+1} = -u_n + b$ ؛ $u_0 = u_0$ ؛ $u_1 = -u_0 + b$ ؛ $u_2 = u_0$ ؛ $u_3 = -u_0 + b$ ؛ $u_4 = u_0$ ؛ $u_5 = -u_0 + b$ ؛ $u_6 = u_0$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $p \in \mathbb{N}$: $u_{2p} = u_0$ و $u_{2p+1} = -u_0 + b$

بصيغة أخرى من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n\left(u_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}$.

للبرهان على التخمين يمكن استعمال السؤال 3) لدينا $u_n = v_n + \alpha = v_n + \frac{b}{2} = v_0(-1)^n + \frac{b}{2}$ ؛ أي

$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{2}\right)(-1)^n + \frac{b}{2}$.

متتالية متقاربة نحو العدد e

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية و المتتاليات.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل:

1. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - (1+x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{e^x}{x} - \frac{1+x}{x}\right] = +\infty$.

$f'(x) = e^x - 1$ ومنه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

1. 2) من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) \geq 0$ معناه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x \leq e^x$ ... (1)

1. 3) بوضع $x=-X$ (1) تصبح $1-X\le e^{-X}$ وبفرض $X<1$ أي $1-X>0$ يكون $\frac{1}{e^{-X}}\le\frac{1}{1-X}$

أي $e^{X}\le\frac{1}{1-X}$. وبالتالي إذا كان $x<1$ فإن $e^{x}\le\frac{1}{1-x}$ ... (2)

1. 2) بوضع $x=\frac{1}{n}$ (1) تصبح $1+\frac{1}{n}\le e^{\frac{1}{n}}$ أي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e$.

2. 2) بوضع $x=-(n+1)$ يكون $-(n+1)<1$ والمتباينة (2) تصبح $e^{-(n+1)}\le\frac{1}{n+2}$ إذن

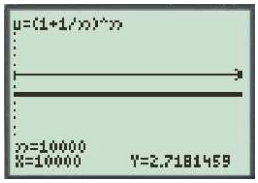
$1+\frac{1}{n}\le\frac{1}{n+2}\le e^{-(n+1)}$ ومنه $e\le\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}$

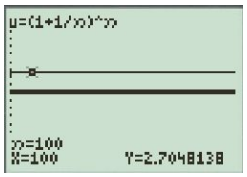
1. 3) لدينا $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ معناه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-u_n\le e-u_n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-u_n$ أي

$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e-u_n\le\frac{3}{n}$ وبالتالي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e\le 3$ ولدينا $0\le e-u_n$ إذن $0\le e-u_n\le\frac{3}{n}$.

2. 3) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}e-u_n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$.

3. 3)





تطبيق

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)\left[(n+1)!\right]}-\frac{1}{n(n!)}+\frac{1}{(n+1)!}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n!)}\left[\frac{-1}{n(n+1)^2}\right]$ إذن $v_{n+1}-v_n<0$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n!)}=0$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية.

حساب مساحة

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليتين المتجاورتين.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج .

الحل: بسيط

متتالية متقاربة نحو العدد $\ln(2)$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية و المتتاليات.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل:

الجزء الأول

1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ،

2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	1	2	3	4	5	6	7	8
2	u	0,5	0,5833	0,6167	0,6345	0,6456	0,6532	0,6587	0,6629

الجزء الثاني

1) نعتبر الدالتين g و h حيث $g(x)=1-x+\ln x$ و $h(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{1-x}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$.

$g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

إذن من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $g(x) \le 0$ معناه $1-x+\ln x \le 0$ أي $\ln x \le x-1$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\frac{1}{x}(1+x\ln x)=-\infty$ ؛

$h'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)=-\infty$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

إذن من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $h(x) \le 0$ معناه $1-\frac{1}{x}-\ln x \le 0$ أي $1-\frac{1}{x} \le \ln x$.

خلاصة $1-\frac{1}{x} \le \ln x \le x-1$.

2) ليكن p عدد طبيعي **غير معدوم**.

نضع $x=\frac{p+1}{p}$ وبالتعويض في المتباينة السابقة نجد : $1-\frac{p}{p+1} \le \ln\frac{p+1}{p} \le \frac{p+1}{p}-1$ وهذا يعني

$\frac{1}{p+1} \le \ln\frac{p+1}{p} \le \frac{1}{p}$.

3) $(a$ $\frac{1}{n+1} \le \ln\frac{n+1}{n} \le \frac{1}{n}$ ؛ $\frac{1}{n+2} \le \ln\frac{n+2}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$ ؛ ... ؛ $\frac{1}{2n} \le \ln\frac{2n}{2n-1} \le \frac{1}{2n-1}$.

b) الطرف 1 : $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n}$. الطرف 2 : $\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}\right)=\ln 2$.

الطرف3: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{n}+u_n-\frac{1}{2n}$ أي $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}=u_n+\frac{1}{2n}$

إذن $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$.

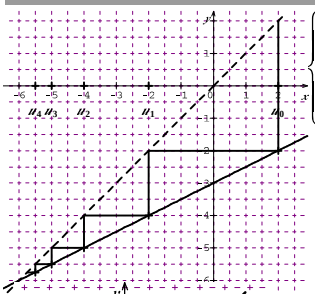
4) المتباينة السابقة تكافئ $0 \le \ln 2 - u_n \le \frac{1}{2n}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

التمارين

التمارين التطبيقية

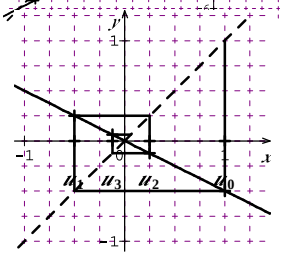
1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية.

1 أ ـ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$



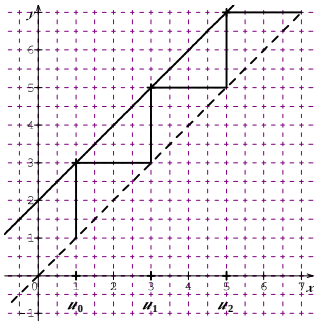
متناقصة تماما.

ب ـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$.



ليست رتيبة .

جـ ـ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.



متزايدة تماما.

2 $v_{n+1} - v_n = \frac{3}{5}r$ و $w_{n+1} - w_n = u_{3n+3} - u_{3n} = u_{3n} + 3r - u_{3n} = 3r$.

3 لدينا $(90-2r) + (90-r) + 90 = 180$ ومنه $3r = 90$ أي $r = 30$ إذن الأقياس هي 30°، 60° و 90°.

4 1) استعمال التراجع.

2) لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{v_n + 1}{v_n} = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + u_n$ إذن (u_n) حسابية أساسها 1.

5 $u_7 = u_3 + 4r$ معناه $r = \frac{u_7 - u_3}{4}$ أي $r = 6$ ؛ $u_{17} = u_3 + 14r = 97$.

6 1) $u_n = u_1 + 3(n-1) = 3n - 5$.

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20})$ ولدينا $u_{20} = 55$ إذن $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = 530$.

7 $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \ldots + 10$.

S هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_1 = \frac{1}{2}$ ؛ $a_n = a_1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n$

إذن $a_n = 10$ معناه $n = 20$ وبالتالي $S = \frac{20}{2}\left(\frac{1}{2} + 10\right)$

أي $S = 105$.

8 $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} = \frac{5^n \times 5}{7^{n+1} \times 7} = \frac{5^n}{7^{n+1}} \times \frac{5}{7} = u_n \times \frac{5}{7}$.

9 $q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = \left(\frac{18}{11}\right)^3$ ؛ $q = \frac{18}{11}$ ؛ $u_{30} = u_{10} \times q^{20}$

أي $u_{30} = \frac{27 \times 18^{20}}{11^{23}}$

10 1) $u_n = -2 \times 3^{n-1}$.

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = (-2)\frac{3^7 - 1}{3 - 1} = -2186$.

3) $v_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} \times 3^2 = 9v_n$.

إذن (v_n) هندسية أساسها 9 وحدها الأول $v_1 = u_2 = -6$

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (-6)\frac{9^n - 1}{9 - 1} = -\frac{3}{4}(9^n - 1)$.

11 1) $u_3 = 9u_1$ معناه $u_1 \times q^2 = 9u_1$ أي $q^2 = 9$

لأن $u_1 > 0$ وعليه $q = 3$ أو $q = -3$ وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن $q = 3$.

2) $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 3^n$.

3) $s_n = u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = 3^{n+1}-1$.

2 ـ الاستدلال بالتراجع .

12 $p(0)$ تعني $0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$.

إذا كانت $1+2+...+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ فإن

$$1+2+...+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

أي $1+2+...+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

13 $p(0)$ تعني $0^2 = \dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.

إذا كانت $1^2+2^2+...+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

14 $p(0)$ تعني $0^3 = \dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$.

إذا كانت $1^3+2^3+...+k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ فإن

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

15 أ) $p(1)$ تعني $u_1 > 1$ أي $2 > 1$.

$u_k > 1$ معناه $\sqrt{u_k} > \sqrt{1}$ ومعناه $u_{k+1} > 1$.

ب) $p'(1)$ تعني $u_2 \le \dfrac{3}{2}$ أي $\sqrt{2} \le \dfrac{3}{2}$.

إذا كان $u_{k+1} \le \dfrac{3}{2}$ فإن $u_{k+1} \le \dfrac{9}{4}$ ومنه $\sqrt{u_{k+1}} \le \sqrt{\dfrac{9}{4}}$

مع الملاحظة أن $u_{k+1} > 1$ إذن $u_{k+2} \le \dfrac{3}{2}$.

16 $p(n)$ هي الخاصية " $u_n = 3$ "

$p(0)$ تعني $u_0 = 3$.

إذا كانت $u_k = 3$ فإن $u_{k+1} = \sqrt{6+u_k} = \sqrt{9} = 3$.

17 1) $p(0)$ تعني $0 < u_0 < 1$

$0 < u_k < 1$ معناه $0^2 < u_k{}^2 < 1^2$ أي $0 < u_{k+1} < 1$.

2) $u_{n+1} - u_n = u_n(u_n - 1)$ بما أن $0 < u_n < 1$ فإن

$u_n > 0$ و $u_n - 1 < 0$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$.

18 $p(0)$ تعني $2^0 - 1$ مضاعف لـ 7.

لدينا $2^{3k} - 1 = 7\alpha$ معناه $2^{3k} = 7\alpha + 1$.

$2^{3(k+1)} - 1 = 8 \times 2^{3k} - 1 = 8 \times (7\alpha + 1) - 1$ أي

$2^{3(k+1)} - 1 = 7 \times (8\alpha + 1)$.

19 $p(0)$ تعني $3^0 - 1$ مضاعف لـ 8.

لدينا $3^{2k} - 1 = 8\alpha$ معناه $3^{2k} = 8\alpha + 1$.

$3^{2(k+1)} - 1 = 9 \times 3^{2k} - 1 = 9 \times (8\alpha + 1) - 1$ أي

$3^{2(k+1)} - 1 = 8 \times (9\alpha + 1)$.

20 $p(n)$ هي " $\mathbf{3^{2n} - 2^n}$ مضاعف للعدد 7 "

$p(0)$ هي الخاصية $3^0 - 2^0$ مضاعف لـ 7.

$3^{2n} - 2^n = 7\alpha$ معناه $3^{2n} - 2^n = 7\alpha + 2^n$.

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ أي

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7(9\alpha + 2^n) - 2 \times 2^n = 7(9\alpha + 2^n)$

يمكن اعتبار $p(n)$ هي " $\mathbf{3^{2n+1} + 2^{n+2}}$ مضاعف للعدد 7 ".

21 $p(0)$ تعني $0^3 - 2 \times 0$ يقبل القسمة على 3.

نفرض أن $n^3 + 2n = 3\alpha$

لدينا $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3$

أي $(n+1)^3 + 2(n+1) = 3\alpha + 3n^2 + 3n + 3$.

22 1) لدينا $10^n + 1 = 9\alpha$ معناه $10^n = 9\alpha - 1$ أي

$10^{n+1} = 90\alpha - 10$ ومعناه $10^{n+1} = 9(10\alpha - 1) - 1$.

2) من أجل $n = 0$ ، $10^0 + 1 = 2$ و 2 ليس مضاعف لـ 9.

3 ـ تقارب متتالية عددية .

23 لدينا $-10^{-3}<u_n<10^{-3}$ معناه $0<\dfrac{1}{n\sqrt{n}}<10^{-3}$

ومعناه $n\sqrt{n}>\dfrac{1}{10^{-3}}$ ويكافئ $n^3>10^6$ أي $n>10^2$.

24 $u_n>10^6$ معناه $n\sqrt{n}>10^6$ ومعناه $n^3>10^{12}$

أي $n>10^4$.

25 لدينا $u_n=\dfrac{3}{2^n}$ ؛ $u_n<10^{-5}$ معناه $2^n>3\times10^5$

أي $n>\dfrac{3\times10^5}{\ln 2}$ إذن ابتداء من الدليل 432809 .

26 لدينا $u_n=3^n$ ؛ $u_n>10^{12}$ معناه $3^n>10^{12}$ أي

$n>\dfrac{10^{12}}{\ln 3}$ إذن ابتداء من الدليل 910239226627 .

27 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$. 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n-2}{4n-3}=\dfrac{5}{4}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-\dfrac{2}{n+1}=+\infty$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{3}-4+\dfrac{n+2}{n^2+1}=+\infty$.

28 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}=7$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}=-1$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n+12}{n^2+1}=0$. 4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2n}{4n+3}=+\infty$.

29 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+1}=0$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\sqrt{n}+1\right)=+\infty$.

30 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\dfrac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)=\cos(-3\pi)=-1$.

3) $u_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{17}$. لدينا $-\dfrac{1}{n}\le u_n\le\dfrac{1}{n}$ ،

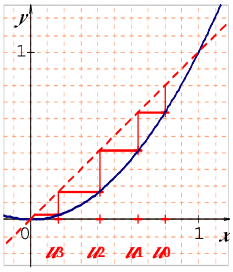
بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

31 1) $\mathscr{C}$ تقاطع Δ و هما النقطتان $O(0;0)$ و $A(1;1)$.

2) f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

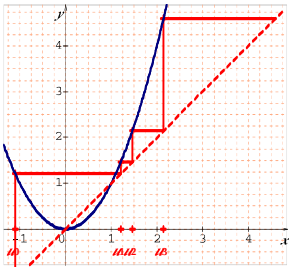
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه (u_n) متباعدة.

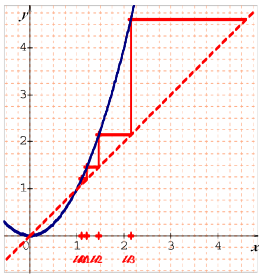
3) في حالة $v_0=0{,}8$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو 0



في حالة $v_0=-1{,}1$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

في حالة $v_0=1{,}1$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$





4) لدينا $f(0)=0$ و $f(1)=1$ إذن باختيار $v_0=0$ أو $v_0=1$ فتكون (v_n) ثابتة .

4 ـ المتتاليات المحدودة .

32 لدينا $u_{10^4}=5-\dfrac{10}{10^8}=5-10^{-7}=4{,}9999999$

ومنه $u_{10^4}>4{,}99999$ إذن العددين 0 و 4,99999 ليس عنصران حدان من الأعلى للمتتالية (u_n).

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $-\dfrac{10}{n^2}<0$

ومنه $u_n<5$ وبالتالي 5 و 6 هما عنصران حادان من الأعلى للمتتالية.

33 أ ـ لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $-1\le\sin\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)\le1$

إذن (u_n) محدودة بـ -1 و 1.

ب - لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $1 < 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2$ إذن

(u_n) محدودة بـ 1 و 2.

جـ- لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $1 < 1 + \frac{1}{n+2} < 2$ إذن

(u_n) محدودة بـ 1 و 2.

د - لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1$ إذن

(u_n) محدودة بـ 0 و 1.

34 أ - $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ؛ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛

$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 1

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 \leq u_n < 1$.

ب - $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$ ؛ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ ؛

$f'(x) = \frac{4x}{2(x^2+1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 1

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \leq u_n < 1$.

جـ- $u_n = \frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$ ؛ $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{3x+2}}$

$f'(x) = \frac{9}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ ↗ 0

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\frac{-3\sqrt{2}}{2} \leq u_n < 0$.

35 أ - $u_n = 2^n$ ؛ (u_n) متتالية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = 1$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n = n\sqrt{3} - 2$ ؛ (u_n) متتالية حسابية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = -2$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

جـ- $u_n = n^2 + n - 1$ ؛ $f(x) = x^2 + x - 1$ ؛

$f'(x) = 2x + 1$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

(u_n) محدودة من الأسفل بـ $u_0 = -1$ فقط.

36 أ - $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$ ؛ من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n > n^2 \geq 0$ إذن (u_n) محدودة من الأسفل وغير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n = n + \cos n$ ؛ $f(x) = x + \cos x$ ؛

$f'(x) = 1 - \sin x$ ولدينا $1 - \sin x \geq 0$.

بما أن $x - 1 \leq x + \cos x$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\quad$ $+$
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$

(u_n) محدودة من الأسفل بـ $u_0 = 1$ فقط.

جـ- $u_n = (-1)^n \times n^2$ ؛ إذا كان n زوجيا فإن $u_n = n^2$ وبالتالي (u_n) ليست محدودة من الأعلى؛

وإذا كان n فرديا فإن $u_n = -n^2$ وبالتالي (u_n) ليست محدودة من الأسفل.

37 1) $f(x)=x^2-5x+6$ ؛ $f'(x)=2x-5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

2) الدالة f متزايدة تماما على $]4;+\infty[$ إذن من أجل كل $x\geq 4$ ، $f(x)\geq f(4)$ أي $x^2-5x+6\geq 2$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 ، $n^2-5n+6\geq 2$ وهذا يعني $\frac{1}{n^2-5n+6}\leq\frac{1}{2}$.

5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

38 $u_n=\frac{-1}{2n+4}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ ؛ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$

و $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ إذن (u_n) متزايدة

و (v_n) متناقصة ، ولدينا $u_n-v_n=\frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ وبالتالي (u_n) و (v_n) متجاورتين.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

39 $u_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ و $v_n=1+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ إذن (v_n) متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$.

40 أ ـ $u_n=\frac{2n-3}{n+1}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{(n+1)(n+2)}$

ومنه (u_n) متزايدة.

$v_n=\frac{2n+3}{n+1}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{n+1}=0$ (v_n) متناقصة.

إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

ب ـ $u_n=3+\frac{(-1)^n}{n}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n+1}$

ومنه (u_n) ليست رتيبة وبالتالي (u_n) و (v_n) غير متجاورتين .

41 $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$

إذن (v_n) متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

42 $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$ ؛

$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{2n(2n+1)}$ إذن (v_n) متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$.

43 $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n(n+1)^2}$ إذن (v_n)

متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$.

44 $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+2)(n+1)}\right)}$

ومنه (u_n) متزايدة.

$v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ ؛

$v_{n+1}-v_n = \frac{-2n^2-2n-1}{\sqrt{n+1}\left(2\sqrt{n(n+1)}+(2n+1)\right)}$ ومنه

(v_n) متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$

تمارين للتعمّق

1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية .

45 $u_n = \frac{\ln n}{n}$ ؛ ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ؛

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ؛ $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) \le 0$ معناه $x \ge e$ ؛ إذن f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ وبالتالي (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة 3.

46 $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ ؛ كل حدود u موجبة تماما ؛ ولدينا

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ معناه $\frac{5}{n+1} < 1$ أي $n > 4$

إذن المتتالية u تكون متناقصة ابتداء من الدليل 5 أي الرتبة السادسة.

47 $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{7}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ معناه

$n > 6$ إذن u تكون متزايدة ابتداء من الدليل 7 أي الرتبة الثامنة.

48 $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ ؛

$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ إذن $u_{n+1}-u_n > 0$.

$v_{n+1}-v_n = \frac{-1}{(n!)n(n+1)^2}$ إذن $v_{n+1}-v_n < 0$.

49 1) أ ـ $\begin{cases} v_1+v_2+v_3 = 24 \\ v_4+v_5+v_6+v_7 = 74 \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} v_1+r = 8 \\ 2v_1+9r = 37 \end{cases}$ أي $\begin{cases} v_1 = 5 \\ r = 3 \end{cases}$.

ب ـ $v_n = 3n+2$ ؛ $v_n > 6023$ معناه $n > 2007$

وبالتالي أصغر عدد طبيعي n هو 2008 .

2) $2S_n = n(3n+7)$ معناه $n(u_1+u_n) = n(3n+7)$

أي $(d-3)n-d+2u_1-7 = 0$ إذن $d = 3$ و $u_1 = 5$.

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0 = -4$.

1) $u_n = -5n-4$.

2) أي $S = u_{26}+u_{27}+\ldots+u_{125} = 50(u_{26}+u_{125})$

$S = 50(-5\times 26-4-5\times 125-4) = -38150$

51 $u_0 = 2$ ، $4u_{n+1}-2u_n = 9$ ، $v_n = 2u_n-9$

أ ـ $u_1 = 3,25$ ، $u_2 = 3,875$ و $u_3 = 4,1875$.

$v_0 = -5$ ، $v_1 = -2,5$ ، $v_2 = -1,25$ و $v_3 = -0,625$.

ب ـ $v_{n+1} = 2u_{n+1}-9 = u_n-\frac{9}{2} = \frac{1}{2}v_n$

جـ ـ $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{9}{2}$.

د ـ $v_0+v_1+\ldots+v_n = 10\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$ ؛

$u_0+u_1+\ldots+u_n = 5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]-\frac{9}{2}(n+1)$.

52 $u_0 = 14$ ، $u_{n+1} = 4u_n+3$ ، $v_n = u_n+1$.

1) $v_{n+1} = u_{n+1}+1 = 4(u_n+1) = 4v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0 = u_0+1 = 15$.

2) $v_n = 15\times 4^n$ ؛ $u_n = 15\times 4^n-1$.

3) $S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + ... + {u_n}^2$ ؛ لدينا

ومنه ${u_n}^2 = 225\times 4^{2n} - 30\times 4^n + 1$

$S_n = 225\left(4^0 + 4^2 + ... + 4^{2n}\right)$

$-30\left(4^0 + 4^1 + ... + 4^n\right) + n + 1$

$S_n = 15\times 4^{2(n+1)} - 10\times 4^{n+1} + n - 4$.

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_0 = \frac{2}{9}$

$S = u_3 + u_4 + ... + u_{10} = u_3\frac{3^8 - 1}{2} = \frac{2}{9}\times 3^3 \times \frac{3^8 - 1}{2}$

أي $S = 19680$.

54 $S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + ... + 312,5$ ؛

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها -5 ؛

بوضع $u_1 = 0,02$ يكون $u_n = 0,02(-5)^{n-1}$

$u_n = 312,5$ معناه $(-5)^{n-1} = 15625$ أي $n = 7$.

$S = 0,02\frac{(-5)^7 - 1}{-6} = -52,08$.

55 $u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$. $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$s_n = 2\frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3\frac{4^{n+1} - 1}{3} = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$.

56 $u_1 = 1$ ، $u_{n+1} = 2u_n + 3$ ، $v_n = u_n + 3$

1) $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2v_n$ إذن (v_n) هندسية أساسها 2.

- $v_n = 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ؛ $u_n = 2^{n+1} - 3$.

2) $s_n = v_1\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+2} - 4$.

- أي $u_1 + u_2 + ... + u_n + 3n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

$u_1 + u_2 + ... + u_n + 3n = 2^{n+2} - 4 = 4\left(2^n - 4\right)$.

57 $u_0 = \frac{1}{6}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$ ، $v_n = 2u_n + \frac{5}{3}$.

1) $u_1 = -\frac{7}{12}$ ، $u_2 = -\frac{37}{48}$ و $u_3 = -\frac{157}{192}$. $v_0 = 2$ ،

$v_1 = \frac{1}{2}$ و $v_2 = \frac{1}{8}$.

2) $v_{n+1} = 2u_{n+1} + \frac{5}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{12} = \frac{1}{4}v_n$ إذن (v_n)

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$. - $v_n = \frac{2}{4^n}$ ؛ $u_n = \frac{1}{4^n} - \frac{5}{6}$.

3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = 2\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{2}{3\times 4^n} + \frac{8}{3}$ ،

لدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n - \frac{5}{6}$ ومنه $t_n = -\frac{1}{3\times 4^n} - \frac{5}{6}n + \frac{1}{2}$.

58 $\begin{cases} u_0 = 2\ ,\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} : n \geq 1 \text{ من أجل كل} \end{cases}$.

1) $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$ ؛ a و b هما حلا المعادلة

$x^2 - 4x + 1 = 0$ إذن $(a;b) = \left(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right)$ أو

$(a;b) = \left(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\right)$.

2) $v_n = u_{n+1} - au_n$ ؛ ليكن n عددا طبيعيا ،

أي $v_{n+1} = u_{n+2} - au_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n - au_{n+1}$

أي $v_{n+1} = (4 - a)u_{n+1} - u_n = bu_{n+1} - abu_n$

إذن $v_{n+1} = bv_n$ (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

3) $w_n = u_{n+1} - bu_n$ ؛ ليكن n عددا طبيعيا ،

$w_{n+1} = u_{n+2} - bu_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n - bu_{n+1}$

أي $w_{n+1} = (4 - b)u_{n+1} - u_n = au_{n+1} - abu_n$

إذن $w_{n+1} = aw_n$ (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

4) $v_0 = u_1 - au_0 = 4 - 2a = b - a$

و $w_0 = u_1 - bu_0 = 4 - 2b = a - b$

$v_n = v_0 b^n = (b - a)b^n$ و $w_n = w_0 a^n = (a - b)a^n$

لدينا : $v_n = u_{n+1} - au_n$ و $w_n = u_{n+1} - bu_n$ إذن

$w_n - v_n = -bu_n + au_n = (a - b)u_n$ ومنه

$u_n = \frac{w_n - v_n}{a - b} = a^n + b^n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$.

59 a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + 2ca - b^2 + c^2$

بما أن $b^2 = ac$ فإن $2b^2 = 2ac$ ، ومنه

$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

2) لدينا $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3276 \end{cases}$ معناه

أي $\begin{cases} a+b+c=78 \\ (a+b+c)(a-b+c)=3276 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a-b+c=42 \end{cases}$ $2b=78-42=36$ أي $b=18$.

$\begin{cases} a+c=60 \\ ac=18^2=324 \end{cases}$ ؛ a و c هما حلا المعادلة ذات

المجهول x التالية : $x^2-60x+324=0$. إذن

$(a;b;c)=(6;18;54)$ أو $(a;b;c)=(54;18;6)$.

60 a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

$b^3=343$ أي $b=7$.

$\begin{cases} a+c=29,75 \\ ac=49 \end{cases}$. $x^2-29,75x+49=0$

$(a;b;c)=\left(28;7;\frac{7}{4}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4};7;28\right)$.

61 لدينا $b=qa$ و $c=q^2a$ ؛ إذن $3a+c=4b$

بما أن $a\neq 0$ فإن $3a+q^2a=4qa$ $q^2-4q+3=0$

أي $q=1$ أو $q=3$.

62 1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، $v_{n+1}=13u_{n+1}-4$ معناه

$v_{n+1}=13\left(\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n\right)-4=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}\times\frac{v_n+4}{13}$

أي : $v_{n+1}=\frac{12}{10}-\frac{3}{10}v_n+\frac{12}{13}=-\frac{3}{10}v_n$ وبالتالي

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{3}{10}$.

2) $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ومنه $v_n=(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4\right]$

أي $u_n=\frac{(13a-4)}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$.

3) $s_n=u_1+u_2+...+u_n$ معناه

$s_n=\frac{1}{13}(v_1+4+v_2+4+...+v_n+4)$ ومعناه

أي $s_n=\frac{1}{13}(v_1+v_2+...+v_n+4n)$

$s_n=\frac{v_1}{13}\times\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{4n}{13}$ ؛

$s_n=-\frac{10}{13}\left(a-\frac{4}{13}\right)\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^n-1\right]+\frac{4n}{13}$

63 $\alpha_1=3$ ؛ $\alpha_3+\alpha_5=\frac{15}{16}$.

1) $q=\frac{1}{2}$.

2) $s_n=\alpha_1\frac{q^n-1}{q-1}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ،

$\beta_{n+1}-\beta_n=\ln(\alpha_{n+1})-\ln(\alpha_n)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

وبالتالي (β_n) هي متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$

ب - $t_n=\frac{n}{2}(\beta_1+\beta_n)=\frac{n}{2}(2\beta_1-(n-1)\ln 2)$

$t_n=\frac{n}{2}(2\ln 3-\ln 2^{n-1})=\frac{n}{2}\ln\frac{9}{2^{n-1}}$

64 لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$A_n=\underbrace{11...1}_{n\text{ رقم}}$ ومنه $9A_n=\underbrace{99...9}_{n\text{ رقم}}$ ومنه

$9A_n+1=1\underbrace{00...0}_{n\text{ رقم}}=10^n$

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=10^n$ هي هندسية

أساسها 10 . ولدينا : $A_n=\frac{1}{9}(10^n-1)=\frac{1}{9}(u_n-1)$

ومنه $s_n=\frac{1}{9}(u_1-1)+\frac{1}{9}(u_2-1)+...+\frac{1}{9}(u_n-1)$

$s_n=\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{1}{9}n$.

65 $u_n=10^n$ و $A_n=\frac{1}{3}(u_n-1)$

وعليه $s_n=\frac{1}{3}\left[(u_1+u_2+...+u_n)-n\right]$ ؛

$s_n=\frac{1}{3}\left[u_1\frac{10^n-1}{9}-n\right]=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$

66 $u_0=5$ ، $u_{n+1}=5u_n-7n$ ؛

$v_n=u_n-\frac{7}{4}n-\frac{7}{16}$.

1) النتائج المحصل عليها مع حساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

n	0	1	2	3	4
u_n	5	25	118	576	2859
v_n	4.5625	22.81	114.06	570.31	2851.56
	5	5	5	5	5

5	6	7	8
14267	71300	356458	1782241
14257,81	71289,1	356445,313	1782226,56
5	5	5	5

يبدو أن المتتالية (v_n) هندسية ذات الأساس 5 .

2) ليكن n عدد طبيعي ، $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{7}{4}(n+1)-\frac{7}{16}$

$v_{n+1}=5v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية ذات الأساس 5.

$v_n=v_0\times 5^n$ ومنه $v_n=\frac{73}{16}\times 5^n$ ؛

$u_n=\frac{73}{16}\times 5^n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$.

3) $s_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، ولدينا

$u_n=v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ ،

$s_n=\left(v_0+\frac{7}{16}\right)+\left(v_1+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}\right)+...+\left(v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}\right)$

$s_n=(v_0+v_1+...+v_n)+\frac{7}{4}(1+2+...+n)+\frac{7}{16}(n+1)$

$s_n=v_0\frac{5^{n+1}-1}{4}+\frac{7n(n+1)}{8}+\frac{7}{16}(n+1)$ ؛

$s_n=\frac{73}{64}\left(5^{n+1}-1\right)+\frac{7}{16}\left(2n^2+3n+1\right)$.

67 $u_0=-2$ ، $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ ، α و β عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_0=-2$ ومنه العلاقة $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ تصبح $-2=-2\alpha+\beta$ أي :

$\beta=2\alpha-2$.

2) أ ـ ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\gamma$.

$v_{n+1}=\alpha u_n+\beta+\gamma=\alpha(v_n-\gamma)+\beta+\gamma$

$v_{n+1}=\alpha v_n-\alpha\gamma+\beta+\gamma=\alpha v_n-\gamma(\alpha-1)+\beta$

إذن لكي تكون المتتالية (v_n) هندسية يجب أن يكون

$-\gamma(\alpha-1)+\beta=0$ أي : $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$.

ب ـ $\alpha=3$ ، $\beta=2$ و $\gamma=1$ العلاقة $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ محققة

وبالتالي (v_n) هندسية أساسها $\alpha=3$ حدها الأول $v_0=-1$ ؛ ومنه $s_n=v_0\frac{3^n-1}{3-1}=-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}$.

لدينا $v_n=u_n+1$ معناه $u_n=v_n-1$ ومنه

$t_n=(v_0-1)+(v_1-1)+...+(v_n-1)=s_n-(n+1)$

$t_n=-\frac{3^n}{2}-n-\frac{1}{2}$.

2 ـ الاستدلال بالتراجع .

68 1) أ ـ $s_1=1$ ، $s_2=5$ ، $s_3=14$ و $s_4=30$.

ب ـ $s_{n+1}=s_n+(n+1)^2$.

2) $p(1)$ هي الخاصية $s_1=\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$

إذا كان $s_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

أي $s_{k+1}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$s_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

69 1) $t_1=1\times 2=2$ ، $t_2=t_1+2\times 3=8$ ،

$t_3=t_2+3\times 4=20$ و $t_4=t_3+4\times 5=40$.

$t_{n+1}=t_n+(n+1)(n+2)$.

2) $p(1)$ تعني $t_1=\frac{1}{3}\times 1(1+1)(1+2)$ وهي صحيحة.

إذا كانت $t_k=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ فإن

$t_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ معناه

أي $t_{k+1}=\left(\frac{1}{3}k+1\right)(k+1)(k+2)$

$t_{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

70 $s_2=1$ و $p(2)$ تعني. $s_2=1+\left(\frac{1}{2}\times 2-1\right)2^2$.

إذا كانت $s_k = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k$ فإن

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k + k\times 2^{k-1}$ معناه

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{k+1}{2}-1\right)2^{k+1}$.

$(n-1)2^n - n\times 2^{n-1}+1 = n\times 2^n - 2^n - \frac{1}{2}n\times 2^n + 1$

$= -2^n + \frac{1}{2}n\times 2^n + 1 = 1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n = s_n$

71 $p(1)$ تعني $\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = 1\times 2\times 3$.

نضع $\alpha_n = 1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$

نفرض $\alpha_k = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$؛

$\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)(k+2)(k+3)$ معناه

$\alpha_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} +$

$\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

أي $\alpha_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

72 $p(1)$ تعني $(1+1)!-1 = 1$.

نضع $\alpha_n = 1+2\times 2!+3\times 3!+\ldots+n(n!)$

نفرض $\alpha_k = (k+1)!-1$.

$\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)\left[(k+1)!\right]$ معناه

أي $\alpha_{k+1} = (k+1)!-1+(k+1)\left[(k+1)!\right]$

$\alpha_{k+1} = (k+1)!(k+2)-1 = (k+2)!-1$

73 $p(1)$ تعني $1! \geq 2^{1-1}$.

من أجل كل $k\in\mathbb{N}^*$ ، $k+1\geq 2$

إذا كان $k! \geq 2^{k-1}$ فإن $(k+1)(k!) \geq 2^{k-1}\times 2$

أي $(k+1)! \geq 2^k$.

74 $\mathcal{P}(4)$ تعني $2^4 \geq 4^2$.

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا حيث $k\geq 4$ ونفرض $2^k \geq k^2$.

إذا كان $k\geq 4$ فإن $k^2 \geq 4k$ وكذلك إذا كان $k\geq 4$

فإن $2k\geq 8$ ومنه $2k>1$ إذن $2k+2k>1+2k$

وبالتالي $k^2 > 2k+1$ وحسب فرضية التراجع لدينا

$2^k \geq k^2$ إذن $2^k > 2k+1$

لدينا إذن $2^k \geq k^2$ و $2^k > 2k+1$ بجمع طرف إلى طرف نجد $2^k+2^k > k^2+2k+1$ أي

$2\times 2^k > (k+1)^2$ معناه $2^{k+1} > (k+1)^2$

ومنه $2^{k+1} \geq (k+1)^2$.

75 $\mathcal{P}(2)$ تعني $5^2 \geq 4^2+3^2$.

نفرض $5^k \geq 4^k+3^k$ ومنه $5^{k+1} \geq 5\times 4^k+5\times 3^k$،

بما أن $5\times 4^k \geq 4\times 4^k$ و $5\times 3^k \geq 3\times 3^k$ فإن

$5^{k+1} \geq 4^{k+1}+3^{k+1}$ ومنه $5\times 4^k+5\times 3^k \geq 4^{k+1}+3^{k+1}$.

76 متباينة برنولي (*Bernoulli*)

1) $p(1)$ تعني $1+a\geq 1+a$.

نفرض $(1+a)^k \geq 1+k\,a$ ومنه

$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$.

2) إذا كان $q>1$ فإن $q=1+a$ مع $a>0$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $q^n \geq 1+an$ ولدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+an = +\infty$ لأن $a>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

77 1) $p(2)$ تعني $12\geq 9$. نفرض $3k^2 \geq (k+1)^2$

ومنه $3k^2+6k+3 \geq (k+1)^2+6k+3$

أي $3(k+1)^2 \geq k^2+8k+4$ بما أن $8k\geq 4k$ فإن

$3(k+1)^2 \geq k^2+4k+4$ أي $3(k+1)^2 \geq (k+2)^2$.

2) نسمي P_n الخاصية : " $3^n \geq 2^n+5n^2$ " .

أ ــ P_1 تعني $3\geq 7$؛ P_2 تعني $9\geq 24$؛ P_3 تعني

$27\geq 53$؛ P_4 تعني $81\geq 96$؛ P_5 تعني $243\geq 157$

إذن P_5 هي الخاصية الأولى الصحيحة .

ب ــ نفرض $3^k \geq 2^k+5k^2$ مع $k\geq 5$ ، ومنه

$3^{k+1} \geq 3\times 2^k+5\times 3k^2 \geq 2\times 2^k+5\times(k+1)^2$

لأن $3\geq 2$ ومن 1) لدينا $3k^2 \geq (k+1)^2$.

78 من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، P_n تعني " $3^n \geq (n+2)^2$ ".

1) P_0 تعني $1\geq 4$ ، P_1 تعني $3\geq 9$ ، P_2 تعني $9\geq 16$

و P_3 تعني $27\geq 25$ وهي الخصية الصحيحة.

2) نفرض $3^k \geq (k+2)^2$ من أجل $k \geq 3$ إذن
$3^{k+1} \geq 3(k+2)^2$ معناه $3^{k+1} \geq 3k^2+12k+12$
ومنه $3^{k+1} \geq k^2+6k+9$ أي $3^{k+1} \geq (k+3)^2$.

79 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$.

1) $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$ ؛ يبدو أن
$u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = 1$.

نفرض $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ ؛ $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}$.

80 $u_0 = 7$ ، $u_{n+1} = 10u_n - 18$.

1) $u_1 = 52$ ، $u_2 = 502$ ، $u_3 = 5002$ ، $u_4 50002$
و $u_5 = 500002$. في الحد u_n يوجد $(n-1)$ صفرا

2) $u_n = 5\times 10^n + 2$.

$p(0)$ تعني $u_0 = 5\times 10^0 + 2 = 7$.

نفرض $u_k = 5\times 10^k + 2$ ؛ $u_{k+1} = 10u_k - 18$ معناه
$u_{k+1} = 10\left(5\times 10^n + 2\right) - 18 = 5\times 10^{n+1} + 2$.

81 $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1) $u_1 = 1$ ، $u_2 = -1$ ، $u_3 = -5$ ، $u_4 = -13$
و $u_5 = -29$. $3 - u_n = 2^n$.

2) $p(0)$ تعني $3 - u_0 = 2^0$. نفرض $3 - u_k = 2^k$ ؛
$3 - u_{k+1} = 6 - 2u_k = 6 - 2\left(3 - 2^k\right) = 2^{k+1}$.

82 $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = 4 - u_n$.

1) $u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ ، $u_3 = 1$ ، $u_4 = 3$ و $u_5 = 1$.
$u_{2n+1} = 1$ و $u_{2n} = 3$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = 3$ و $u_1 = 1$.
نفرض $u_{2k} = 3$ و $u_{2k+1} = 1$. لدينا
$u_{2(k+1)} = 4 - u_{2k+1} = 3$ و $u_{2(k+1)+1} = 4 - u_{2(k+1)} = 1$.

83 $s_n = 1+3+5+...+(2n-1)$.

1) $s_1 = 1$، $s_2 = 4$، $s_3 = 9$ و $s_4 = 16$. $s_n = n^2$.

2) $p(1)$ تعني $s_1 = 1^2$. نفرض $s_k = k^2$ ؛
$s_{k+1} = s_k + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

3) s_n هو مجموع n حدا الأولى من متتالية حسابية
أساسها 2 وحدها الأول1إذن $s_n = \dfrac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$.

84 $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = n + u_n$.

1) $u_1 = 1$ ؛ $u_2 = 2$ ؛ $u_3 = 4$ ؛ $u_4 = 7$ ؛ $u_5 = 11$.
يبدو أن $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = \dfrac{0(0-1)}{2} + 1$.

نفرض $u_k = \dfrac{k(k-1)}{2} + 1$ ؛
$u_{k+1} = k + \dfrac{k(k-1)}{2} + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + 1$.

85 $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

1) $u_1 = \dfrac{1}{3}$، $u_2 = \dfrac{1}{7}$، $u_3 = \dfrac{1}{15}$، $u_4 = \dfrac{1}{31}$، $u_5 = \dfrac{1}{63}$.
$u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = \dfrac{1}{2-1}$. نفرض $u_k = \dfrac{1}{2^{k+1}-1}$؛
$u_{k+1} = \dfrac{u_k}{u_k + 2} = \dfrac{1}{2^{k+1}-1} \Big/ \left(\dfrac{1}{2^{k+1}-1} + 2\right)$ أي
$u_{k+1} = \dfrac{1}{2^{k+1}-1} \Big/ \left(\dfrac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1}\right) = \dfrac{1}{2^{k+2}-1}$.

86 $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = u_n + 2$.
$v_0 = 1$ ، $v_{n+1} = v_n + u_n$.

1) u_n هو الحد العام لمتتالية حسابية أساسها 2 ومنه
$u_n = 2n + 1$.

2) $p(0)$ تعني $v_0 = 1 + 0^2$. نفرض $v_k = 1 + k^2$ ؛
$v_{k+1} = v_k + u_k = 1 + k^2 + 2k + 1 = 1 + (k+1)^2$.

87 $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،
$u_{n+1} - u_n > 0$ أي (u_n) متزايدة تماما.

2) $p(0)$ تعني $u_0 > 0$ نفرض $u_k > k^2$ ؛

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3$ ومنه $u_{k+1} > k^2 + 2k + 3$

وعليه $u_{k+1} > k^2 + 2k + 1$.

88 $u_0 \in]0;1[$ ، **تصحيح** $u_{n+1} = -u_n^{\,2} + 2u_n$.

$p(0)$ تعني $0 < u_0 < 1$. نفرض $0 < u_k < 1$.

نعتبر الدالة $f : x \mapsto -x^2 + 2x$ ؛ $f'(x) = -2x + 2$

ومنه' f موجبة تماما على $]0;1[$ أي f متزايدة تماما على $]0;1[$ وبالتالي $f(0) < f(u_k) < f(1)$ أي

$0 < u_{k+1} < 1$.

89 $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

* $p(0)$ تعني $0 \le u_0 \le 2$. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x) = \sqrt{2+x}$ ؛ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$

' f موجبة على $[0;2]$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$

وبالتالي إذا كان $0 \le u_k \le 2$ فإن $f(0) \le f(u_k) \le f(2)$

أي $0 \le u_{k+1} \le \sqrt{2}$ ومنه $0 \le u_{k+1} \le 2$

* $p(n)$ هي الخاصية $u_{n+1} > u_n$.

$p(0)$تعني $u_1 > u_0$ أي $1 > \sqrt{3}$.نفرض $u_{k+1} > u_k$ معناه

$u_{k+2} + 2 > u_k + 2$ وبما أن $u_n \ge 0$ فإن $u_{k+2} > u_{k+1}$

90 $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $0 \le u_n < 4$.

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

1) $u_1 = \sqrt{12} \simeq 3.464$ ، $u_2 = \sqrt{12 + \sqrt{12}} \simeq 3.93$,

$u_3 = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} \simeq 3{,}991$ ، هي تنتمي إلى المجال $]0;4]$.

2) الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $0 \le u_0 < 4$ وهذا صحيح

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفترض $0 \le u_k < 4$ ومنه

$12 \le 12 + u_k < 16$ أي $4 < \sqrt{12 + u_k} \le \sqrt{12}$

ومنه $0 \le \sqrt{12 + u_k} < 4$ إذن $0 \le u_{k+1} < 4$.

3) نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ لنبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} > u_n$ وهذا باستعمال الاستدلال بالراجع

الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_0 < u_1$ وهذا صحيح لأن $u_0 = 0$

و $u_1 = \sqrt{12}$. ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض

$u_k < u_{k+1}$ ومنه $12 + u_k < 12 + u_{k+1}$ومما سبق كل

الحدود موجبة إذن $\sqrt{12 + u_k} < \sqrt{12 + u_{k+1}}$ ومنه

$u_{k+1} < u_{k+2}$.

91 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n - 1{,}2$.

1) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$هي الخاصية $u_{n+1} < u_n$.

الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1 < u_0$ ولدينا من تعرف المتتالية

$u_0 = 2$ و $u_1 = 0$ ومنه $u_1 < u_0$ إذن $\mathcal{P}(0)$ صحيحة .

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_{k+1} < u_k$ ومنه

$0{,}6u_{k+1} - 1{,}2 < 0{,}6u_k - 1{,}2$ أي $0{,}6u_{k+1} < 0{,}6u_k$

ومعناه $u_{k+2} < u_{k+1}$.

2) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}'(n)$هي الخاصية $u_n > -3$.

$\mathcal{P}'(0)$ تعني $u_0 > -3$ وهذا صحيح لأن $u_0 = 2$.

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k > -3$ معناه

$0{,}6u_k - 1{,}2 > -1{,}8 - 1{,}2$ أي $0{,}6u_k > -1{,}8$

وباستعمال تعريف المتتالية يكون $u_{k+1} > -3$.

92 $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}$.

1) $p(0)$ تعني $0 \le u_0 \le 1$ وهي صحيحة.

نفرض $0 \le u_k \le 1$ ؛ لدينا $u_{k+1} = \dfrac{u_k + 1}{u_k + 3}$ ومنه $u_{k+1} \ge 0$.

$u_{k+1} - 1 = \dfrac{-2}{u_k + 3}$ ومنه $u_{k+1} - 1 \le 0$ أي $0 \le u_{k+1} \le 1$.

2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_{n+1} < u_n$.

$p'(0)$ تعني $u_1 < u_0$ أي $\dfrac{1}{2} < 1$. نعتبر الدالة

$f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$؛ $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)}$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على $[0;1]$ وبالتالي إذا كان

$u_{k+1} < u_k$ فإن $f(u_{k+1}) < f(u_k)$ أي $u_{k+2} < u_{k+1}$.

93 θ عدد حقيقي من المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$u_0 = 2\cos\theta$ ، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) أ - $u_1 = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$.

$u_2=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=2\cos\frac{\theta}{4}$.

ب - $p(0)$ هي $u_0>0$ أي $2\cos\theta>0$ وهذا صحيح لأن $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. نفرض $u_k>0$ إذن $2+u_k>2$ ومنه $\sqrt{2+u_k}>\sqrt{2}$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$ ومنه $u_{k+1}>0$.

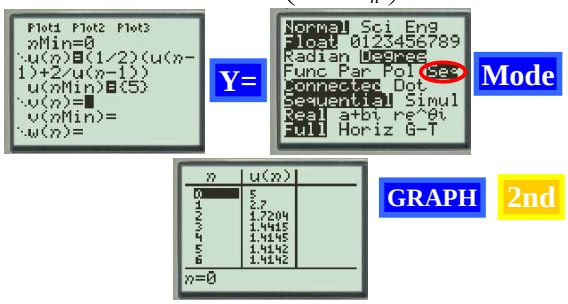
2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ ؛

$p'(0)$ تعني $u_0=2\cos\frac{\theta}{2^0}=2\cos\theta$.

نفرض $u_k=2\cos\frac{\theta}{2^k}$ ، أي $u_{k+1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)}$

$u_{k+1}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^k\times2}}=2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$

94 $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.



2) يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة .

نعتبر الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ لدينا من أجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

ومنه من أجل كل $x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ $f'(x)\geq0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-u_n=\frac{2-u_n^2}{2u_n}$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية "$u_n>\sqrt{2}$".

$\mathcal{P}(0)$ هي $u_0>\sqrt{2}$ وهذا صحيح لأن $u_0=5$.

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>\sqrt{2}$ ، لدينا $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$ و $f(u_k)=u_{k+1}$ من فرضية التراجع $u_k>\sqrt{2}$ وبما أن f متزايدة تماما على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ ينتج $f(u_k)>f\left(\sqrt{2}\right)$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$.

لدينا $2-u_n^2<0$ و $u_n>0$ إذن $\frac{2-u_n^2}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

95 من أجل كل $n:u_n=n\times2^{n-1}$: $n\in\mathbb{N}^*$.

$p(1)$ تعني $u_1=1+(1-1)2^1$.

نفرض أن $u_1+u_2+...+u_k=1+(k-1)2^k$ ؛

$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+(k-1)2^k+(k+1)2^k$

أي $u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+k\,2^{k+1}$.

96 من أجل كل $n:u_n=\frac{1}{n(n+1)}$: $n\in\mathbb{N}^*$.

1) لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ و $p(1)$ تعني $u_1=\frac{1}{1+1}$.

نفرض $u_1+u_2+...+u_k=\frac{k}{k+1}$ ؛

$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

أي $u_1+u_2+...+u_{k+1}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

2) نسمي S المجموع

$\frac{1}{1427\times1428}+\frac{1}{1428\times1429}+...+\frac{1}{2007\times2008}$.

ونضع $T=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+...+\frac{1}{2007\times2008}$

و $t=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+...+\frac{1}{1426\times1427}$

إذن $S=T-t=\frac{2007}{2008}-\frac{1426}{1427}=\frac{581}{2865416}$

97 الخاصية الابتدائية هي $\left(2+\sqrt{3}\right)^0=p_0+q_0\sqrt{3}$

وهي صحيحة بأخذ $p_0=1$ و $q_0=0$.

نفرض أنه من أجل $k\in\mathbb{N}$ ، يوجد عددان طبيعيان p_k و q_k حيث $\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p_k+q_k\sqrt{3}$.

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(p_k+q_k\sqrt{3}\right)$ معناه

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2p_k+3q_k\right)+\left(p_k+2q_k\right)\sqrt{3}$

بوضع $p_{k+1}=2p_k+3q_k$ و $q_{k+1}=p_k+2q_k$ وهما

عددان طبيعيان فيكون $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{3}$.

98 1) $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

أ ــ $u_3=5$ ، $u_4=7$ و $u_5=9$. $u_n=2n-1$.

ب ــ الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_1=2\times1-1=1$.

نفرض $u_k=2k-1$ ؛

$u_{k+1}=2u_k-u_{k-1}=4k-2-2k+3=2k+1$

2) $v_0=\frac{2}{5}$ ، $v_1=1$ و $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$.

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $v_0=\frac{2^0+3^0}{5}=\frac{2}{5}$.

نفرض $v_k=\frac{2^k+3^k}{5}$ ؛ $v_{k+1}=5v_k-6v_{k-1}$

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{6}{5}\left(2^{k-1}+3^{k-1}\right)$ ؛

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{3}{5}2^k-\frac{2}{5}3^k=\frac{1}{5}2^{k+1}+\frac{1}{5}3^{k+1}$.

99 $u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

الخاصية الابتدائية $u_0=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^0+\left(2-\sqrt{3}\right)^0\right]$.

نفرض $u_k=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$ ؛

ومعناه $u_{k+1}=4u_k-u_{k-1}$

$u_{k+1}=2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$

$-\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}}{2}$

$u_{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$

$4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2}$

$4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}$

ومنه $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k+1}\right]$.

100 $u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

أ ـ الخاصية الابتدائية $u_0>-1$.

نفرض $u_k>-1$ معناه $u_k+1>0$ ومنه $\sqrt{u_k+1}>0$

أي $u_{k+1}>0$ وبالتالي $u_{k+1}>-1$.

ب ـ $u_0=2$ و $u_1=\sqrt{3}$ ومنه $u_1<u_0$.

نفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $u_{k+1}+1<u_k+1$ إذن $0<u_{k+1}+1<u_k+1$

أي $\sqrt{u_{k+1}+1}<\sqrt{u_k+1}$. $u_{k+2}<u_{k+1}$

جـ ـ الخاصية الابتدائية $u_0\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أي $2\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نفرض $u_k\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $u_k+1\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ إذن

$\sqrt{u_k+1}\geq\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ أي $u_{k+1}\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

لأن $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

101 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$ ، $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$.

1) $u_0=1$ ومنه $u_0\neq4$. نفرض $u_k\neq4$

ونفترض $u_{k+1}=4$ أي $\frac{u_k+4}{u_k-2}=4$ معناه $u_k=4$

وهذا تناقض إذن $u_{k+1}\neq4$ أي كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n\neq4$.

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-4}=\frac{2u_n+2}{u_n-2}\times\frac{u_n-2}{-3u_n+12}$؛

$v_{n+1}=-\frac{2}{3}\times\frac{u_n+1}{u_n-4}=-\frac{2}{3}v_n$.

2) $v_n=v_0\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ معناه $u_n\left(v_n-1\right)=4v_n+1$

لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n\neq1$

لدينا الخاصية الابتدائية $v_0 \neq 1$ لأن $v_0 = -\frac{2}{3}$. إذا كان $v_k \neq 1$ أي $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \neq 1$ فإن $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} \neq 1$ ومنه $v_{k+1} \neq 1$

$u_n = \frac{4v_n + 1}{v_n - 1} = \left[4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right] / \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$.

102 $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

1) $p(x+1) - p(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{6}\right) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) = x^2$

2) الخاصية الابتدائية هي $p(0) = 0$ إذن $p(0) \in \mathbb{N}$.

نفرض $p(k) \in \mathbb{N}$ لدينا $p(k+1) = p(k) + k^2$ ومنه $p(k+1) \in \mathbb{N}$.

3) الخاصية الابتدائية هي $p(1) = 0^2$ وهذا صحيح لأن $p(1) = \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6} = 0$.

نفرض $p(k+1) = 1^2 + 2^2 + ... + k^2$ ؛

لدينا $p(n+2) = p(n+1) + (n+1)^2$ معناه $p(n+2) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$.

103 $u_1 = 0$ ، $u_{n+1} = \frac{-1}{u_n - 2}$.

لدينا $u_2 = \frac{1}{2}$ ، $u_3 = \frac{2}{3}$ ، $u_4 = \frac{3}{4}$ يبدو أن $u_n = \frac{n-1}{n}$

لنبرهن باستعمال التراجع .

الخاصية الابتدائية هي $u_1 = \frac{1-1}{1} = 0$ وهي صحيحة.

نفرض $u_k = \frac{k-1}{k}$ ؛ $u_{k+1} = \frac{-1}{u_k - 2} = \frac{-1}{\frac{k-1}{k} - 2} = \frac{k}{k+1}$

$u_{2006} = \frac{2005}{2006}$.

104 إذا كان $n = 24$ فإن $n = 5 \times 2 + 7 \times 2$

نفرض من أجل $k \geq 24$ فيكون $k = 5a + 7b$

- إذا كان $b = 0$ فإن $k = 5a$ وعليه $a \geq 5$ ولدينا :

$k + 1 = 5a - 20 + 21 = 5(a-4) + 7 \times 3$.

- إذا كان $b = 1$ فإن $k = 5a + 7$ وعليه $a \geq 4$ ولدينا :

$k + 1 = 5a - 20 + 28 = 5(a-4) + 7 \times 4$.

- إذا كان $b \geq 2$ فإن $k + 1 = 5a + 7b + 15 - 14$

أي $k + 1 = 5(a+3) + 7(b-2)$.

105 1) $u_1 = \frac{1}{2}$ ، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$.

أ ــ $u_2 = \frac{1}{2}$ ، $u_3 = \frac{3}{8}$ ، $u_4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ، $u_5 = \frac{5}{32}$.

ب ــ الخاصية الابتدائية هي $u_1 = \frac{1}{2^1}$. نفرض $u_k = \frac{k}{2^k}$ ؛

$u_{k+1} = \left(\frac{k+1}{2k}\right) u_k = \left(\frac{k+1}{2k}\right) \frac{k}{2^k} = \frac{k+1}{2^{k+1}}$.

2) $k \in \mathbb{N}^*$ ، $v_1 = \frac{1}{k}$ ، $v_{n+1} = \left(\frac{n+1}{kn}\right) v_n$.

$v_1 = \frac{1}{k}$ ، $v_2 = \frac{2}{k^2}$ ، $v_3 = \frac{3}{k^3}$ ، ... $v_n = \frac{n}{k^n}$.

الخاصية الابتدائية هي $v_1 = \frac{1}{k^1}$. نفرض $v_r = \frac{r}{k^r}$ ،

$v_{r+1} = \left(\frac{r+1}{kr}\right) v_n = \left(\frac{r+1}{kr}\right) \frac{r}{k^r} = \frac{r+1}{k^{r+1}}$.

3 ـ تقارب متتالية عددية .

106 1) $\lim_{n \to +\infty} e^{1-n} = 0$. 2) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) = 0$.

3) $\lim_{n \to +\infty} (n+2)e^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} + 2e^{-n} = 0$.

4) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(3 + e^{2-n}\right) = \ln 3$.

5) $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} = \frac{1}{2}$. 6) $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} = -1$.

7) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) = \ln 1 = 0$.

8) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) = 0$.

107 1) $u_n = n^2\left(\sqrt{3 + \frac{2}{n+1}} - \sqrt{3}\right)$.

$u_n = \frac{2n^2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{2}{n+1}} + \sqrt{3}}$ ؛ $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{3}} = +\infty$

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3}n=\dfrac{-1}{\sqrt{3n^2-1}+\sqrt{3}n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$.

$u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$

$u_n=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$ ،

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

108 أ - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ لأن $-1<\dfrac{2}{5}<1$.

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3,01^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3,01}{3}\right)^n=+\infty$ لأن $\dfrac{3,01}{3}>1$.

جـ - $u_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}$ ؛

$u_n=-\dfrac{5}{4}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}-1\right]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{5}{4}$.

109 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3u_n+1}$ و $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

1) استعمال التراجع ؛ $p(0)$ تعني $u_0>0$.

إذا كانت $u_k>0$ فإن $3u_k+1>0$ ومنه $u_{k+1}>0$.

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{3u_n+1}{u_n}=3+v_n$.

3) $v_n=3n+\dfrac{1}{2}$ ومنه $u_n=\dfrac{2}{6n+1}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

110 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$.

$s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\dfrac{1}{3}u_n+1$ معناه

$v_{n+1}=\dfrac{1}{3}(v_n-3)+1=\dfrac{1}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية .

2) $v_n=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3$ ومنه $u_n=v_n-3=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3$ بما

أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$.

$s_n=\dfrac{3}{2}v_0\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\dfrac{3}{2}v_0=\dfrac{15}{2}$.

$t_n=s_n-3(n+1)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=-\infty$

111 $u_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$.

$v_n=\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{n^2+1}{n^2+n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$.

$w_n=u_n-n=\dfrac{1-n}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n}=-1$.

$t_n=\dfrac{v_n-1}{w_n-1}=\dfrac{n-1}{2n^2}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$.

112 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-4}{n+1}=+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n-4}{n+1}=-3$.

113 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=\dfrac{1}{n!}$.

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=\dfrac{1}{2}$ ؛ $u_3=\dfrac{1}{6}$ ؛ $u_4=\dfrac{1}{24}$ ؛

$u_5=\dfrac{1}{120}$ ؛ $u_6=\dfrac{1}{720}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ $n!\geq n$

ومنه $0<u_n\leq\dfrac{1}{n}$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

114 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\dfrac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1\le\cos(3n-\pi)\le 1$

ومنه من أجل $n\neq 0$ ، $-\frac{1}{\sqrt{n}}\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

115 من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=n+1-\cos\frac{n\pi}{5}$.

$-1\le-\cos\frac{n\pi}{5}\le 1$ ومنه $n\le u_n\le n+2$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty}n=\lim\limits_{n\to+\infty}n+2=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

116 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$.

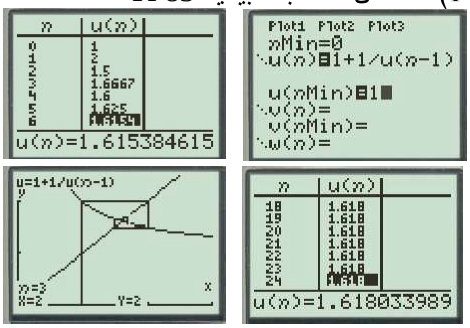
1) القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من (u_n).

2) ليكن n عدد طبيعي، $n\ge 30$ معناه $\frac{n}{10}-1\ge 2$

ومعناه $\left(\frac{n}{10}-1\right)^n\ge 2^n$ أي $u_n\ge 2^n$

$2>1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

117 1) استعمال الحاسبة البيانية TI 83 .



ابتداء من u_{23} أي الدليل 23 تستقر قيم الحدود على 1,618033989.

يبدو أن المتتالية متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي 1,618033989 .

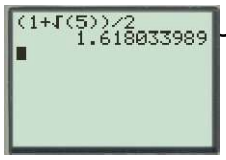
إذا كانت المتتالية u متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ هذا من جهة ،

ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{u_n}=1+\frac{1}{l}$ إذن

$1+\frac{1}{l}=l$ ومعناه $l^2-l-1=0$ و $l\neq 0$.

مميز المعادلة $l^2-l-1=0$ هو 5 ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما $l'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $l''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0>0$ وإذا كان $u_k>0$ من أجل k عدد طبيعي كيفي, فإن $1+\frac{1}{u_k}>0$ أي $u_{k+1}>0$



وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$ وبالتالي $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

118 لدينا $u_1=0,57=57\times\frac{1}{100}$ ،

$u_2=0,57+0,0057=0,57+0,57\times\frac{1}{100}$

$u_2=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}\right)$.

نفترض أن $u_k=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}\right)$ من أجل k عدد طبيعي كيفي غير معدوم. $u_{k+1}=0,\underbrace{57\ldots57}_{2k+2\text{ رقما}}$

ومنه $u_{k+1}=\underbrace{0,00\ldots0057}_{2k\text{ رقما}}+\underbrace{\qquad\qquad}_{2k+2\text{ رقما}}$

إذن $u_{k+1}=u_k+\frac{57}{10^{2k+2}}$ ؛

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}\right)+57\times\frac{1}{100^{k+1}}$

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}+\frac{1}{100^{k+1}}\right)$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^n}\right)$

$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^n}\right)$ هو مجمع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها وحدها الأول مساويين للعدد $\frac{1}{100}$.

نفترض أن $2^k \le (k-1)!$ من أجل k عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 6 . إذن $2^k \le (k-1)!$ و $k \ge 2$

ومنه $2^{k+1} \le k(k-1)!$ وبالتالي $2^{k+1} \le 2\times 2^k$

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من كل عدد طبيعي $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$

2) ليكن $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$ معناه $2^n \le \dfrac{n(n-1)!}{n}$ أي $2^n \le \dfrac{n!}{n}$ و بالتالي $\dfrac{2^n}{n!} \le \dfrac{1}{n}$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 6$ ،

بما أن $0 \le \dfrac{2^n}{n!} \le \dfrac{1}{n}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$

إذن المتتالية ذات الحد العام $\dfrac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = a$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+{u_n}^2}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا، ${u_n}^2 \ge 2$ معناه $2+{u_n}^2 \ge 2$

ومعناه $\dfrac{1}{2+{u_n}^2} \le \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{|u_n|}{2+{u_n}^2} \le \dfrac{|u_n|}{2}$

ولدينا $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+{u_n}^2}$ إذن $|u_{n+1}| = \dfrac{|u_n|}{|2+{u_n}^2|} = \dfrac{|u_n|}{2+{u_n}^2}$

وبالتالي : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $|u_{n+1}| \le \dfrac{|u_n|}{2}$.

2) لدينا $|u_0| = |a|$ و $\dfrac{|a|}{2^0} = |a|$ إذن الخاصية $|u_0| \le \dfrac{|a|}{2^0}$ صحيحة .

نفترض أن الخاصية $|u_k| \le \dfrac{|a|}{2^k}$ من أجل عدد طبيعي k كيفي إذن $\dfrac{1}{2}|u_k| \le \dfrac{1}{2}\times\dfrac{|a|}{2^k}$ ، ومنه $\dfrac{|u_k|}{2} \le \dfrac{|a|}{2^{k+1}}$ بما أن $|u_{k+1}| \le \dfrac{|u_k|}{2}$ من السؤال السابق فإن $|u_{k+1}| \le \dfrac{|a|}{2^{k+1}}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،

$|u_n| \le \dfrac{|a|}{2^n}$.

3) حسب السؤال السابق من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،

$|u_n| \le \dfrac{|a|}{2^n}$ معناه $-\dfrac{|a|}{2^n} \le u_n \le \dfrac{|a|}{2^n}$ أي

$-|a|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \le u_n \le |a|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

بما أن $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty} -|a|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}|a|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

123 (u_n) معرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1) أ - لدينا : $u_0 > 0$ نفترض أن $u_k > 0$ من أجل k عدد طبيعي كيفي ، ومنه $u_k + 2 > 0$ و $2u_k + 1 > 0$ إذن $\dfrac{u_k+2}{2u_k+1} > 0$ وبالتالي $u_{k+1} > 0$ وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$.

ب - إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}_+^*$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة . ومن جهة أخرى لدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n+2}{2u_n+1} = \dfrac{l+2}{2l+1}$ ومنه $\dfrac{l+2}{2l+1} = l$

ومعناه $2l^2 = 1$ أي $l^2 = 1$ ومنه $l = 1$.

2) $\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+1}$ ، الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$ و $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

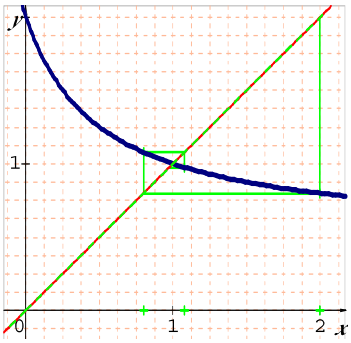
ولدينا : $f'(x) = \dfrac{(2x+1)-2(x+2)}{(2x+1)^2} = \dfrac{-3}{(2x+1)^2}$

ومنه من أجل كل عدد x من $[0\,;\,2,2]$ $f'(x) < 0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0\,;\,2,2]$

x	0	1	2,2
$f(x)$	2	↘	0,77
		1	

يبدو أن (u_n) متقاربة



ونهايتها 1 .

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ- ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = -\frac{1}{3} v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3}$

بما أن $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ فإن (v_n) متقاربة .

$v_n = v_0 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = (-1)^n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.

ب- ليكن n عددا طبيعيا ، $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

لدينا $v_n = 1$ معناه $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1$ ومعناه $u_n - 1 = u_n + 1$

أي $-1 = 1$ وهذا تناقض إذن $v_n \neq 1$.

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ معناه $v_n u_n + v_n = u_n - 1$ ومعناه

$v_n u_n - u_n = -v_n - 1$ يكافئ $(v_n - 1)u_n = -v_n - 1$

أي $u_n = \dfrac{-v_n - 1}{v_n - 1}$.

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_0 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

وبالتالي (u_n) متقاربة.

124 (u_n) معرفة بـ $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) لدينا $u_0 = 5$ ، $u_1 = \sqrt{7}$ و $2 \leq \sqrt{7} \leq 5$ إذن $2 \leq u_1 \leq u_0$.

نفترض $2 \leq u_{k+1} \leq u_k$ يعني $4 \leq 2 + u_{k+1} \leq 2 + u_k$

بما أن الدالة الجدر التربيعي متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

فإن $2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ أي $\sqrt{4} \leq \sqrt{2 + u_{k+1}} \leq \sqrt{2 + u_k}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2) من السؤال السابق ينتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة ونهايتها $l \geq 2$.

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + l}$ إذن $l = \sqrt{2 + l}$.

لدينا $l \geq 2$ و $l = \sqrt{2 + l}$ إذن $l^2 = 2 + l$ معناه

$l^2 - l - 2 = 0$ ومعناه $(l + 1)(l - 2) = 0$ يكافئ

$l = 2$ أو $l = -1$. بما أن $l \geq 2$ فإن $l = 2$.

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1) الدالة $f : x \mapsto \ln(x + 1) - x$ تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ و $f'(x) = \dfrac{1}{x + 1} - 1 = \dfrac{-x}{x + 1}$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ ؛

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)\left[\dfrac{\ln(x + 1)}{x + 1} - \dfrac{x}{x + 1}\right] = -\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

2) من أجل كل $]-1; +\infty[$ ، $x \in$ معناه $f(x) \leq 0$

$\ln(x + 1) \leq x$ ، بوضع $x = \dfrac{1}{k}$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ يكون

$x \in]-1; +\infty[$ ومنه $\ln\left(\dfrac{1}{k} + 1\right) \leq \dfrac{1}{k}$ ولدينا

$\ln\left(\dfrac{1}{k} + 1\right) = \ln\left(\dfrac{1 + k}{k}\right) = \ln(1 + k) - \ln k$

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$، $\ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{k}$.

بتطبيق هذه المتباينة n مرة نحصل على :

$\ln 2-\ln 1\le 1$ ، $\ln 3-\ln 2\le \frac{1}{2}$ ، $\ln 4-\ln 3\le \frac{1}{3}$ ،

... ، $\ln(n+1)-\ln n\le \frac{1}{n}$ ؛ وبجمع طرفا إلى طرف

نجد من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1)\le u_n$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ و $u_n\ge \ln(n+1)$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

3) البرنامج الذي يحدّد أصغر عدد طبيعي n يحقق:

$u_n\ge 10$.

```
PROGRAM:YOUCEF
:0→U
:0→K
:While U<10
:K+1→K
:U+1/K→U
:End
:Disp K
:Disp U
```

```
prgmYOUCEF
          12367
   10.00004301
          Done
```

أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n\ge 10$ هو $n=12367$.

4 ـ المتتاليات المحدودة .

126 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بِـ : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n=\frac{1}{n}$

.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $n^2+1>1$ معناه $\sqrt{n^2+1}>1$

أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<1$، إذن 1 عنصر حاد من الأعلى

لـِ (u_n).

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $n^2+1>n^2$ معناه

$\sqrt{n^2+1}>n$ أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{n}$

3) $0<u_n<v_n<1$.

127 (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بِـ : $u_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}-u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$1+\frac{1}{n+1}>1$ معناه $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ أي (u_n)

متزايدة .

2) $u_n=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$u_n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times...\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$

3) (u_n) متزايدة ونهايتها $+\infty$ إذن هي محدودة من الأسفل بِـ $u_0=\ln 2$ وليست محدودة من الأعلى.

128 (u_n) معرفة بِـ : $u_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}$

.

1) ومنه $u_n=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$

$u_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ أي $u_n-\frac{3}{2}<0$ معناه $u_n<\frac{3}{2}$.

إذن العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}=\frac{3}{2}$.

129 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=e^{-u_n}$.

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ ، $0<u_n<1$.

لدينا $u_1=e^{-u_0}$ ومن أجل كل عدد حقيقي u_0 $e^{-u_0}>0$

إذن $u_1>0$ وبما أن الدالة $x\mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما

على $\mathbb{R}$ فإن $0<e^{-u_1}<e^{-0}$ أي $0<e^{-u_1}<1$ وبالتالي

$0<u_2<1$.

نفترض أنه من أجل k عدد طبيعي كيفي ، $0<u_k<1$

ولنبرهن أن $0<u_{k+1}<1$.

بما أن الدالة $x \mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإنه من فرضية التراجع $0 < u_k < 1$ ينتج : $e^{-0} > e^{-u_k} > e^{-1}$

أي $1 > e^{-u_k} > \frac{1}{e}$، ومن تعريف المتتالية لدينا $u_{k+1} = e^{-u_k}$

إذن $\frac{1}{e} < u_{k+1} < 1$ ومنه $0 < u_{k+1} < 1$.

إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$, $0 < u_n < 1$.

130 (u_n) معرفة بـِ : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4^{n+1}}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4^{n+1}}$ ؛ إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_{n+1} - u_n > 0$ ، وبالتالي (u_n) متزايدة تماما .

2) u_n هو مجموع حدود متتابعة للمتتالية الهندسية ذات الأساس $\frac{1}{4}$ والحد الأول 1 ؛

إذن $u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$ أي

$u_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. بما أن

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3}$.

3) بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول u_0 . زيادة عن هذا فإنها تتقارب إلى $\frac{4}{3}$ إذن هي محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{4}{3}$ وبالتالي لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < \frac{4}{3}$.

$u_n > 1,333333$ معناه $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 1,333333$

ومعناه $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{4}{3} - 1,333333$ ويكافئ

$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 4 - 3,999999$ ومعناه

$n \ln 0,25 < \ln(0,000001)$ أي $n > \frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0,25}$ ومنه

$n \geq 10$ إذن ليس $1,333333$ عنصرا حادا للمتتالية (u_n) .

131 (u_n) المعرفة بـِ u_0 عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n{}^2 - 3u_n + 5$.

1) $u_{n+1} - u_n - 1 = u_n{}^2 - 4u_n + 4 = (u_n + 2)^2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ،

نستنتج أن (u_n) متزايدة.

2) إذا كانت (u_n) متقاربة ونهايتها l فإن

$l = l^2 - 3l + 5$ معناه $l^2 - 4l + 5 = 0$.

3) المميز المختصر لـِ $l^2 - 4l + 5 = 0$ هو -1 إذن لا يوجد أي عدد حقيقي l يحقق المعادلة $l^2 - 4l + 5 = 0$ ومنه المتتالية (u_n) متباعدة.

إذا كانت (u_n) محدودة بما أنها متزايدة فتكون متقاربة وهذا تناقض إذن (u_n) ليست محدودة من الأعلى.

مما سبق نستنتج أن $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

132 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـِ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1) $u_1 = \frac{17}{4}$ و $u_2 = \frac{35}{4}$.

2) استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على الخاصية $u_{n+1} \geq u_n$.

3) (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ ـ $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 12u_n - 16 + \alpha = 12\left(\frac{v_n - \alpha}{4}\right) - 16 + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 3v_n - 16 - 2\alpha$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -8$.

ب ـ $v_n = 4u_n - 8$ ومنه $v_0 = 4u_0 - 8 = 3$ ،

$v_n = 3^{n+1}$ ؛ $u_n = \frac{v_n + 8}{4} = \frac{3^{n+1}+8}{4}$.

ج ــ (u_n) متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = \frac{11}{4}$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) ليست محدودة من الأعلى وبالتالي هي ليست محدودة.

د ــ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + ... + \frac{u_n}{4^n}$.

$w_n = \frac{3+8}{4} + \frac{3^2+8}{4^2} + \frac{3^3+8}{4^3} + ... + \frac{3^{n+1}+8}{4^{n+1}}$،

$w_n = \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) +$

$8\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n+1}}\right)$

$w_n = \frac{3}{4}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{8}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$،

$w_n = 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$،

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}$ إذن (w_n) متقاربة .

5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن

(u_n) متزايدة تماما .

ليكن n عددا طبيعيا ،

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}$

$= \frac{1}{(n+1)\times n!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)\times n!} - \frac{1}{n\times n!}$

$= \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)^2\times n!}$

$= \frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2\times n!} = \frac{-1}{n(n+1)^2\times n!}$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ وبالتالي (v_n) متناقصة تماما .

$v_n - u_n = \frac{1}{n\times n!}$ معناه $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\times n!} = 0$.

خلاصة : (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان .

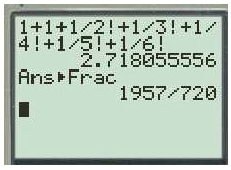
2) بما أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n \le l \le v_n$ أي

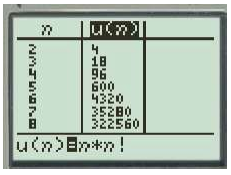
$u_n \le l \le u_n + \frac{1}{n\times n!}$

لكي يكون u_n قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد l يكفي أن يكون $\frac{1}{n\times n!} \le 10^{-3}$ أي $n\times n! \ge 1000$

لدينا $5\times 5! = 600$ و $6\times 6! = 4320$ وهذا يبين أن u_6 هو أقرب قيمة بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد l .

$u_6 = \frac{1957}{720}$ ، $u_6 \simeq 2,718055556$





134 $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$.

1) الخاصية الابتدائية $u_0 \le 1 \le v_0$ ؛ نفرض $u_k \le 1 \le v_k$

معناه $3u_k \le 3 \le 3v_k$ ومعناه $3u_k + 1 \le 4 \le 3v_k + 1$

أي $\frac{3u_k + 1}{4} \le 1 \le \frac{3v_k + 1}{4}$.

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{4}-u_n=\frac{1-u_n}{4}$ بما أن $u_n\le 1$

فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{3v_n+1}{4}-v_n=\frac{1-v_n}{4}$ بما أن $v_n\le 1$ فإن

$v_{n+1}-v_n\le 0$ ومنه (v_n) متناقصة.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}-\frac{3v_n+1}{4}=\frac{3}{4}(u_n-v_n)$ ومنه

المتتالية (w_n) المعرفة بـ $w_n=u_n-v_n$ هندسية

أساسها $\frac{3}{4}$ وعليه $u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ؛ إذن (u_n)

و (v_n) متجاورتان .

$u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}$ معناه $4u_{n+1}-3u_n=1$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4u_{n+1}-3u_n)=1$ أي $l=1$.

135 $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}$

$=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+4v_n}{5}=\frac{2u_n-2v_n}{15}$

أي $w_{n+1}=\frac{2}{15}(u_n-v_n)=\frac{2}{15}w_n$ ، إذن (w_n)

هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=-1$ وبما

أن $-1<\frac{2}{15}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$. $w_n=-\left(\frac{2}{15}\right)^n$.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$

إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{-2u_n+2v_n}{3}$ أي

$u_{n+1}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$.

وكذلك لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n$ ومنه $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$

أي $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{5}=\frac{w_n}{5}$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n<0$ إذن

$u_{n+1}-u_n>0$ و $v_{n+1}-v_n<0$ ومنه (u_n) متزايدة

تماما و (v_n) متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ فإن (u_n) و (v_n)

متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية العدد الحقيقي l .

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n=3u_n+10v_n$ ومنه

$t_{n+1}-t_n=3u_{n+1}+10v_{n+1}-3u_n-10v_n$

$=3(u_{n+1}-u_n)+10(v_{n+1}-v_n)=-2w_n+2w_n=0$

وبالتالي المتتالية (t_n) ثابتة .

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n=t_0$ أي

$3u_n+10v_n=3u_0+10v_0=23$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=23$ هذا من جهة. ومن جهة

أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$ إذن

$13l=23$ وبالتالي $l=\frac{23}{13}$.

136 $u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

1) $u_1=\frac{7}{2}$ ، $v_1=\frac{15}{4}$ ، $u_2=\frac{29}{8}$ و $v_2=\frac{59}{16}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $w_n=v_n-u_n$.

$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_{n+1}}{2}$

$w_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{4}=\frac{1}{4}w_n$ إذن (w_n) هندسية .

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{w_n}{2}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{u_n-v_n}{4}$

$v_{n+1}-v_n=-\frac{w_n}{4}$ بما أن $w_n>0$ فإن (u_n) متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما .

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ إذن (u_n) و (v_n) مجاورتان .

4) تحذف **(برهن أن)** من المعطيات .

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}+2v_{n+1})=\frac{1}{3}(2u_{n+1}+v_n)$

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$ إذن (t_n) متتالية ثابتة .

$\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t_0=\frac{1}{3}(u_0+2v_0)=\frac{11}{3}$

و $l=\frac{1}{3}(l+2l)=l$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=l=\frac{11}{3}$.

137 f معرفة على $[0;2]$ بِـ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

.

1) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$

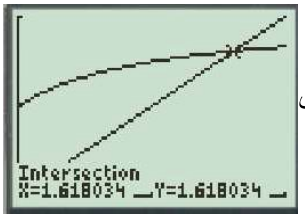
وبالتالي إذا كان $1\le x\le 2$ فإن

$f(1)\le f(x)\le f(2)$ أي $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}$ ومنه

$f(x)\in[1;2]$.

2) $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$.



يبدو أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية وهي فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين .

3) البرهان بالتراجع عن الخواص :

* "$1\le u_n\le 2$" ؛ $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 2$

إذا كان $1\le u_k\le 2$ فإن $1\le f(u_k)\le 2$ أي $1\le u_{k+1}\le 2$.

* "$1\le v_n\le 2$" ؛ نفس البرهان.

* "$u_n\le u_{n+1}$" ؛ $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$.

إذا كان $u_k\le u_{k+1}$ فإن $f(u_k)\le f(u_{k+1})$ لأن f متزايدة ومنه $u_{k+1}\le u_{k+2}$.

* "$v_n\ge v_{n+1}$" ؛ نفس البرهان.

4) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ إذن $2\le u_n+1\le 3$

و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ،

إذن v_n-u_n و $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة ؛

استعمال التراجع : $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ ، وإذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فإن $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$.

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه

$0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}$ بما أن $v_n-u_n\ge 0$ فإن

$\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ أي

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

استعمال التراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

لدينا $v_0-u_0=1$ و $\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$ إذن $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$

نفرض أن $v_k-u_k\le\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

$v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{4}(v_k-u_k)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

لدينا $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n \le u_{n+1}$ و $v_n \ge v_{n+1}$ معناه (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية l.

$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ معناه $u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1 = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1) = 0$ أي

$l^2 - l - 1 = 0$ ومعناه $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أو $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

بينما $1 \le u_n \le 2$ و $1 \le v_n \le 2$ إذن $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

138 a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = a$، $v_0 = b$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$، $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) نسمي p_n الخاصية " $0 < u_n \le v_n$ "

لدينا $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ و $0 < a < b$ إذن

$0 < u_0 \le v_0$ ومنه الخاصية p_0 صحيحة .

نفرض أن الخاصية p_k صحيحة أي $0 < u_k \le v_k$

لدينا $u_k v_k > 0$ إذن $\sqrt{u_k v_k} > 0$ وبالتالي $0 < u_{k+1}$.

لدينا $(u_k + v_k)^2 - (u_k - v_k)^2 = 4u_k v_k$ معناه

$(u_k + v_k)^2 \ge 4u_k v_k$ بما أن $0 < u_k \le v_k$ فإن

$u_k + v_k > 0$ ومنه $u_k + v_k \ge 2\sqrt{u_k v_k}$ معناه

$\frac{u_k + v_k}{2} \ge \sqrt{u_k v_k}$ أي $v_{k+1} \ge u_{k+1}$ وبالتالي :

$0 < u_{k+1} \le v_{k+1}$ إذن الخاصية p_{k+1} صحيحة .

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، الخاصية p_n أي $0 < u_n \le v_n$.

2) ليكن n عددا طبيعيا

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n}^2 + \sqrt{v_n}^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}{2\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)}{\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}(v_n - u_n)$$

$-\sqrt{u_n} < \sqrt{u_n}$ ومنه $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$

إذن $\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < 1$

وبالتالي $\frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

أي $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

نستعمل التراجع ولدينا الخاصية $v_0 - u_0 \le \frac{1}{2^0}(b-a)$

تكافئ $v_0 - u_0 \le (b-a)$ وهي صحيحة .

نفرض أن الخاصية $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b-a)$ ولنبرهن

صحة الخاصية $v_{k++} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

لدينا مما سبق $v_{k+1} - u_{k+1} < \frac{1}{2}(v_k - u_k)$ ومن فرضية

التراجع $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b-a)$ ينتج أن

$\frac{1}{2}(v_k - u_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ إذن

$v_{k+1} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ وحسب مبدأ التراجع ينتج

أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$.

3) لدينا كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما إذن ندرس $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{\sqrt{u_n}^2} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}$ بما أن $0 < u_n \le v_n$ فإن

$0 < \sqrt{u_n} \le \sqrt{v_n}$ ومنه $\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \ge 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$

وبالتالي (u_n) متزايدة .

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{2}$ بما أن

$0<u_n\le v_n$ فإن $u_n-v_n\le 0$ أي $v_{n+1}-v_n\le 0$

وبالتالي (v_n) متناقصة .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$0\le v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(b-a)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}(b-a)=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

خلاصة : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) $a=2$ و $b=5$, إذن $v_n-u_n\le\dfrac{3}{2^n}$.

$2^{11}=2048$ ولدينا $2^n>3000$ معناه $\dfrac{3}{2^n}<10^{-3}$

و $2^{12}=4096$ إذن $n\ge 12$

n	1	2	3	4	5	6
u	2	3,1623	3,32686	3,3289968	3,3289971	3,328997
v	5	3,5	3,33114	3,3289975	3,3289971	3,328997

	7	8	9	10	11
	3,3289971	3,328997	3,328997	3,3289971	3,329
	3,3289971	3,328997	3,328997	3,3289971	3,329

والعدد $l\simeq 3,329$ هو النهاية المشتركة لِـ (u_n) و (v_n).

139 $u_0=-1$، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$.

1) أ ــ $u_0<v_0$ صحيحة . من أجل k عدد طبيعي ،

$u_k<v_k$ معناه $u_k-v_k<0$. لدينا

$u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}-\dfrac{u_k+4v_k}{5}=\dfrac{3u_k-3v_k}{10}$

أي $u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{3}{10}(u_k-v_k)$ إذن $u_{k+1}-v_{k+1}<0$

ب ــ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}$

لدينا $u_n<v_n$ معناه $v_n-u_n>0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي (u_n) متزايدة تماما.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+4v_n}{5}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{5}$ ومنه

$v_{n+1}-v_n<0$ إذن (v_n) متناقصة تماما.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)$

نضع $w_n=u_n-v_n$ ، (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{10}$ ومنه

$w_n=u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ؛ ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $x_n=u_n+av_n$

و $y_n=u_n+bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين.

$x_{n+1}=u_{n+1}+av_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}+a\dfrac{u_n+4v_n}{5}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)u_n+(8a+5)v_n}{10}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)}{10}\left(u_n+\dfrac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$

(x_n) هندسية معناه $\dfrac{8a+5}{2a+5}=a$ أي $2a^2-3a-5=0$

وكذلك (y_n) هندسية معناه $2b^2-3b-5=0$

إذن a و b هما الحلان المتمايزان للمعادلة

$2x^2-3x-5=0$ أي $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ أو $b=-1$

و $a=\dfrac{5}{2}$.

نفرض $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ إذن

$x_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)=\dfrac{3}{10}x_n$

و $y_{n+1}=\left(u_n+\dfrac{5}{2}v_n\right)=y_n$.

لدينا $x_0=u_0-v_0=-3$ و $y_0=u_0+\dfrac{5}{2}v_0=4$ إذن

$x_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=y_0=4$.

3) إيجاد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

لدينا $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ أي

$y_n=u_n+\dfrac{5}{2}v_n=4$ و $x_n=u_n-v_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$

ومنه $v_n = 4 + 3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ أي $\frac{7}{2}v_n = \frac{8}{7} + \frac{6}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n$ إذن $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{8}{7}$

مسائل

140 لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$.

1) (u_n) ثابتة معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_n = \frac{3}{35}u_n + \frac{2}{35}u_n$ معناه $\frac{6}{7}u_n = 0$ أي $u_n = 0$.

(u_n) حسابية ذات الأساس r معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_n + 2r = \frac{3}{35}(u_n + r) + \frac{2}{35}u_n$ أي $u_n = -\frac{67}{30}r$

ومنه (u_n) ثابتة أي $u_n = 0$.

(u_n) هندسية ذات الأساس q معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

ومعناه $u_n q^2 = \frac{3}{35}(u_n q) + \frac{2}{35}u_n$

$u_n\left(35q^2 - 3q - 2\right) = 0$ أي $u_n = 0$ أو $q = -\frac{2}{5}$

أو $q = \frac{4}{7}$.

بما أن (E) هي مجموعة المتتاليات غير المعدومة فإنه لا توجد فيها متتالية ثابتة ولا متتالية حسابية ؛ بينما توجد متتاليتان هندسيتان في المجموعة (E) أساسهما $q = -\frac{2}{5}$

و $q = \frac{4}{7}$.

2) ليكن α و β عددين حقيقيين،

$$\frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n = \frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{35}\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{6}{7} + 2\right) + \frac{1}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{-3}{5} + 2\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{4}{49}\right) + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2} = u_{n+2}$$

إذن المتتالية (u_n) هي عنصر من المجموعة (E) .

3) $u_0 = 3$ معناه $\alpha + \beta = 3$ و $u_1 = -\frac{4}{35}$ معناه

$\frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{5}\beta = -\frac{4}{35}$ أي $10\alpha - 7\beta = -4$ وبالتالي نجد

$\alpha = 1$ و $\beta = 2$ أي $u_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$.

$-1 < \frac{2}{7} < 1$ و $-1 < \frac{-1}{5} < 1$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

141 $I - 1$) الدالة f قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x \geq 0$ لدينا $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$ ومنه $f'(x) \leq 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x \geq 0$ لدينا

$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ ومنه $g'(x) \leq 0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2) لدينا $f(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $f(x) < f(0)$ وبالتالي من أجل كل $x \geq 0$ ، $f(x) \leq 0$ أي $x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) \leq 0$

معناه $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

لدينا $g(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $g(x) < g(0)$ أي $g(x) < 0$ وبالتالي من أجل كل $x \geq 0$,

$g(x) \leq 0$ أي $\ln(1+x) - x \leq 0$ معناه $\ln(1+x) \leq x$.

خلاصة: من أجل كل $x \geq 0$ ، $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

$II - 1$) لدينا $u_1 = \frac{3}{2}$ ومنه $u_1 > 0$. نفرض أن $u_n > 0$ بما أن $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ فإن $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$.

2) $\ln u_1 = \frac{3}{2}$ و $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ إذن $\ln u_1 = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$. نفرض أن

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

ولدينا

$$\ln u_{n+1} = \ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln u_n + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) ليكن k عددا طبيعيا حيث $1 \leq k \leq n$, نضع $x = \frac{1}{2^k}$ العلاقة (1) تصبح

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^k} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

وعدد هذه العلاقات هو n لأن k يتغير من 1 إلى n وبجمع أطراف كل العلاقات نحصل على

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4) أ - S_n و T_n هما مجموعان لحدود متتابعة لمتتاليتين هندسيتين أساسهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ على الترتيب .

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ ؛

$$T_n = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$.

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ ؛

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$.

5) أ - ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ,

$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times u_n$ ، لدينا

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$

و $u_n > 0$ (من السؤال 1) إذن $\frac{1}{2^{n+1}} \times u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة تماما .

ب - لدينا $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n \leq 1$ بما أن $\ln u_n \leq S_n$ فإن $\ln u_n \leq 1$ ومنه $u_n \leq e$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة .

جـ - بما أن (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ؛ لدينا $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ أي

$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq \ln l \leq 1$ معناه $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$ ويكافئ

$e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e$.

142 (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$.

1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = \frac{1}{n^2}(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$

أي $v_n = \frac{n+1}{2n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2) $f : x \mapsto x - \sin x$ ؛ من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x) = 1-\cos x$ ومنه $f'(x) \geq 0$ إذن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ولدينا $f(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $f(x) > f(0)$ أي $f(x) > 0$ وبالتالي الدالة f موجبة .

$x \in [0;+\infty[$ ، $g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$ ؛ من أجل كل $[0;+\infty[$ ،

$g'(x) = x - \sin x = f(x)$ بما أن f موجبة فإن $g'(x) \geq 0$ وبالتالي g متزايدة تماما ولدينا $g(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $g(x) > g(0)$ أي $g(x) > 0$ وبالتالي الدالة g موجبة .

$x \in [0;+\infty[$ ، $h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$ ؛ من أجل كل $[0;+\infty[$ ،

$h'(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x = g(x)$ بما أن g موجبة فإن $h'(x) \geq 0$ وبالتالي h متزايدة تماما ولدينا $h(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $h(x) > h(0)$ أي $h(x) > 0$ وبالتالي الدالة h موجبة .

3) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1 \leq k \leq n$ لدينا $1 \leq k^3 \leq n^3$ أي $1^3 \leq n^3$ ، $2^3 \leq n^3$ ، ... ، $n^3 \leq n^3$ وبالجمع طرفا إلى طرف نحصل على $1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n \times n^3$ أي $1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n^4$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $f(x) \geq 0$ و $h(x) \geq 0$ معناه $x \geq \sin x$ و $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$

أي $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. نضع $x = \frac{k}{n^2}$ ومنه

$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$ إذن $\frac{x^3}{6} = \frac{k^3}{6n^6}$

وبالجمع نحصل على :

$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{6n^6}\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) \leq \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{n}{n^2}$

أي $v_n - \frac{1}{6n^6}\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) \leq u_n \leq v_n$

ولدينا $1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n^4$ معناه

$-\frac{1}{6n^6}\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) \geq -\frac{1}{6n^6} n^4$

ومعناه $v_n - \frac{1}{6n^6}\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) \geq v_n - \frac{1}{6n^2}$ إذن

$v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{2}$.

إذن المتتالية (u_n) متقاربة ، ونهايتها $\frac{1}{2}$.

143 $I - f$ معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

1) من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

ومنه $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماما .

g مستمرة على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{} +\infty} g(x) = +\infty$

خلاصة : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β .

لدينا : $g(0,27) \simeq$ -0.039 و $g(0,28) \simeq 0.007$ إذن $0,27 \leq \beta \leq 0,28$

2) من أجل $x > 0$ لدينا

$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

$f'(\beta) = 0$ ومن أجل $x \in]-\infty;\beta[$ ، $f'(x) < 0$

ومن أجل $x \in]\beta;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x \ln x}{x+1} = 0$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

أي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$II - 1)$ نلاحظ أن $f(1) = 0$ ولدينا $g(\beta) = 0$ معناه

$f(\beta) = \frac{\beta \ln \beta}{\beta + 1} = -\beta$ إذن $\ln \beta = -1 - \beta$

الدالتان $x \mapsto x\sin x$ و $x \mapsto x+1$ مستمرتان على $]0;+\infty[$ و من أجل $x>0$ $x+1\neq 0$ إذن الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها:

x	0	β	1	α_n	$+\infty$
$f'(x)$		$-\ 0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow -\beta$	$\nearrow 0$	$\nearrow n$	$\nearrow +\infty$

إذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n .

2) أ ـ $f\left(e^n\right)=\dfrac{e^n \ln e^n}{e^n+1}=n\dfrac{e^n}{e^n+1}$ ولدينا

$e^n \leq e^n+1$ أي $\dfrac{e^n}{e^n+1}\leq 1$ ومعناه $\dfrac{ne^n}{e^n+1}\leq n$ إذن

$f\left(e^n\right)\leq n$.

بما أن $f(\alpha_n)=n$ فإن $f\left(e^n\right)\leq f(\alpha_n)$ وبما أن f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ فإن حتما يكون $e^n \leq \alpha_n$.

ب ـ $f(\alpha_n)=n$ تكافئ $\dfrac{\alpha_n \ln \alpha_n}{\alpha_n+1}=n$ وتكافئ

$\alpha_n \ln \alpha_n = n\alpha_n + n$ أي $\alpha_n(\ln \alpha_n - n)=n$ ومعناه

$\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)=\dfrac{n}{\alpha_n}$ أي $\ln \alpha_n - \ln e^n = \dfrac{n}{\alpha_n}$ ...(1)

لدينا $e^n \leq \alpha_n$ معناه $\dfrac{e^n}{n}\leq \dfrac{\alpha_n}{n}$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n}=+\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\alpha_n}=0$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{\alpha_n}{e^n}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{e^n}=1$.

3) أ ـ (2) معناه $\dfrac{\alpha_n}{e^n}=1+\varepsilon_n$ ومنه

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{\alpha_n}{e^n}\ln\dfrac{\alpha_n}{e^n}$ ومن (1) ينتج

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{n}{e^n}$.

ب ـ الدالة $u:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا $u'(t)=\ln(1+t)+(1+t)\dfrac{1}{1+t}-1$

أي $u'(t)=\ln(1+t)$ ، من أجل $t\geq 0$ يكون

$\ln(1+t)\geq 0$ ومنه $1+t\geq 1$ إذن $u'(t)\geq 0$

وبالتالي u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ لدينا $u(0)=0$ ومن أجل $t>0$ يكون $u(t)>u(0)$. إذن من أجل كل $t\geq 0$, $u(t)\geq 0$ أي $(1+t)\ln(1+t)-t\geq 0$.

الدالة $v:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t-\dfrac{t^2}{2}$ تقبل الاشتقاق

ومن أجل كل $t\geq 0$ لدينا $v'(t)=\ln(1+t)-t$

$v''(t)=\dfrac{1}{1+t}-1=\dfrac{-t}{1+t}$ من أجل $t\geq 0$ يكون

$v''(t)\leq 0$ إذن v' متناقصة على $]0;+\infty[$ و $v'(0)=0$

إذن من أجل $t\geq 0$ يكون $v'(t)\leq 0$

إذن v متناقصة على $]0;+\infty[$ و $v(0)=0$ إذن من أجل $t\geq 0$ يكون $v(t)\leq 0$ أي

$(1+t)\ln(1+t)-t-\dfrac{t^2}{2}\leq 0$ معناه

$(1+t)\ln(1+t)-t\leq\dfrac{t^2}{2}$.

خلاصة : من أجل كل $t\geq 0$,

$(1+t)\ln(1+t)-t\leq\dfrac{t^2}{2}$.

جـ ـ نضع $t=\varepsilon_n$ يكون إذن

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n\leq\dfrac{\varepsilon_n^{\,2}}{2}$ ولدينا $0\leq(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{n}{e^n}$ ،

إذن $0\leq\dfrac{n}{e^n}-\varepsilon_n\leq\dfrac{\varepsilon_n^{\,2}}{2}$ من المتباينة الأولى ينتج

$\varepsilon_n\leq\dfrac{n}{e^n}$ ويكافئ $\varepsilon_n^{\,2}\leq\dfrac{n^2}{e^{2n}}$ أي $\dfrac{\varepsilon_n^{\,2}}{2}\leq\dfrac{n^2}{2e^{2n}}$.

وبالتالي $0\leq\dfrac{n}{e^n}-\varepsilon_n\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{e^n}\right)^2$ أي

$0\leq ne^{-n}-\varepsilon_n\leq\dfrac{n^2}{2}e^{-2n}$

د ـ (3) تكافئ $0\leq n-\varepsilon_n e^n\leq\dfrac{n^2}{2}e^{-n}$ و (2) تكافئ

$\varepsilon_n e^n=\alpha_n-e^n$ إذن $0\leq n-\alpha_n+e^n\leq\dfrac{n^2}{2}e^{-n}$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(e^{-\frac{1}{2}n}\right)^2=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}e^{-n}=0$

$\lim_{n\to+\infty}\left(e^n+n-\alpha_n\right)=0$

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

144 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

تصحيح إضافة $u_1=1$.

$v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

1) **ب -** المتتالية (w_n) حسابية أساسها 0 وحدها الأول 1.

جـ - المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ وحدها الأول 1.

د - المتتالية (w_n) هندسية أساسها 1.

2) **أ -** $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ **جـ -** $w_n=1$.

3) **أ -** $u_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

ب - $u_n=\frac{3}{5}\left(w_n-v_n\right)$.

د - المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 1) **ب -** $\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$. **جـ -** $n\sin\frac{1}{n}$ و $n>0$.

2) **ب -** المتتالية v محدودة من الأسفل.

د - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحيح أم خطأ ؟

146 1) **صحيحة** لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بحدها الأول.

2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، **جملة خاطئة** لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة مثلا المتتالية المعرفة بـــ $u_n=1+\frac{1}{n+1}$.

3) إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول؛ والجملة المعطاة **صحيحة**.

4) الجملة **صحيحة**.

5) الجملة **صحيحة**.

6) جملة **خاطئة** لأنه يمكن أن تكون $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n$ مثلا $u_n=\frac{1}{n+2}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$.

148 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=1,5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-1$.

1) **صحيحة** لأنه $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ و $f\left(x\right)=2x-1$ ، $f\left(x\right)=x$ معناه $x=1$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-2=2v_n$ إذن الجملة **صحيحة**.

3) $v_n=2^{n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ وبالتالي المتتالية (v_n) ليست محدودة من الأعلى ، والجملة المعطاة **خاطئة**

الباب الثاني

القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم و المضاعفات.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج .

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة القاسم المشترك الأكبر.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القاسم المشترك الأكبر " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم، المضاعفات، المربعات التامة، ....

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

الثلاثيات الفيثاغورثية

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التفكير بواسطة الحاسوب

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1 مجموعة قواسم العدد 20 هي : $\{-20,-10,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,10,20\}$.

2 مجموعة قواسم الموجبة للعدد 39 هي $\{1,3,13,39\}$

$(a,b)\in\{(1,39);(39,1);(3,13);(13,3)\}$.

3 لدينا $x^2-y^2=15$ تعني $(x-y)(x+y)=15$ ويكون العددان الصحيحان $x-y$ و $x+y$ من قواسم15.

4 أ ــ $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.

ب ــ $xy=3x+2y$ تعني $xy-3x-2y+6=6$ أي $(x-2)(y-3)=6$ ثم نستعمل قواسم 6.

7 $-1027\le 53k\le 1112$ معناه $-19\le k\le 20$

عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين 1027– و 1112 هو 40.

8 1) $a=7k$ و $7k<50$ أي $k\le 7$

$a\in\{7,14,21,28,35,42,49\}$.

2) $\frac{33}{21}=\frac{11}{7}=\frac{11a}{7a}$ حيث a عدد صحيح غير معدوم ، $7a<50$ معناه $0<a\le 7$ وبالتالي :

$\frac{11}{7}=\frac{22}{14}=\frac{33}{21}=\frac{44}{28}=\frac{55}{35}=\frac{66}{42}=\frac{77}{49}$

9 13 قاسم للعدد $n+4$ معناه $n+4=13k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ أي $n=13k-4$. $|n|\le 22$ معناه $-24\le n\le 22$

ويكافئ $-24\le 13k\le 22$ ومعناه $-\frac{24}{13}\le k\le\frac{22}{13}$ أي $k\in\{-1,0,1\}$ ،

ومنه $n\in\{-17,-4,9\}$.

10 $12=2^2\times 4$, مجموعة قواسم 12 هي : $\mathcal{D}_{12}=\{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$

$5n+7$	–12	–6	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	6	12
$5n$	–19	–13	–11	–10	–9	–8	–6	–5	–4	–3	–1	5
n				–2				–1				1

العدد $n+6$ يقبل القسم على n معناه $n+6=nk$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ ويكافئ $6=n(k-1)$ إذن n يقسم 6 .

وبالتالي $n\in\{1;2;3;6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

1) $34=2\times 17$ ومنه مجموعة قواسم 34 هي :

$\mathcal{D}_{34}=\{-34,-17,-2,-1,1,2,17,34\}$.

$5n+6$	–34	–17	–2	–1	1	2	17	34
$5n$	–40	–23	–8	–9	–5	–4	11	28
n	–8				–1			

2) $5n+6$ قاسم للعدد $n+8$ ومنه $5n+6$ يقسم $5n+40$ إذن $5n+6$ يقسم $(5n+40)-(5n+6)$ أي 34 يقسم 34 ومنه $n=-1$ أو $n=-8$.

وبالعكس إذا كان $n=-1$ فإن 1 يقسم 7 وإذا كان $n=-8$ فإن -34 يقسم 0 إذن كلا النتيجتين تحقق المطلوب .

14 n عدد صحيح . نضع $a=3n+7$ و $b=7n+2$

إذا كان العدد d قاسما لـ : a و b فإن d يقسم $7a$ و $3b$

ومنه d يقسم $7a-3b=49$.

15 n عدد طبيعي غير معدوما ويختلف عن العدد 1 .

$n^3-n=n(n-1)(n+1)$. بعض القواسم للعدد n^3-n : 1 ، $n-1$ ، n ، $n+1$ ، n^2-n ، n^2+n ، n^2-1 ، n^3-n

17 ليكن a و b عددن صحيحين غير معدومين .

أ) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ب) نفرض أن $a^3 + b^3 = 3k$ إذن

$(a+b)^3 = 3k + 3a^2b + 3ab^2 = 3\left(k + a^2b + ab^2\right)$

2 ـ القسمة الأقليدية

18 تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b :

أ ـ $a = 118$ و $b = 5$. $118 = 5\times 23 + 3$ الباقي هو 3.

ب ـ $a = 152$ و $b = 7$. $152 = 7\times 21 + 5$ الباقي هو 5.

جـ ـ $a = -118$ و $b = 5$. $-118 = 5(-24) + 2$

د ـ $a = -152$ و $b = 7$. $-152 = 7(-22) + 2$

19 عين الأعداد الطبيعية $n = 41k + 5$ مع $41k + 5 < 100$ أي $k \le 2$ ومنه $n \in \{5, 46, 87\}$

20 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a = 17b + 3$ و $b > 3$ و $a = 23b + 27$،

إذن $6b - 24 = 0$ ومنه $b = 4$ و $a = 71$

21 n عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي أي $n = 7k + r$ و $n = 3k' + r$ مع $0 \le r < 3$.

$n - r$ يقبل القسمة على 3 و 7 وهما عددان أوليان ،

إذن موجودين في تحليله وبالتالي 21 يكون قاسم له ،

أي $n - r = 21\alpha$ معناه $n = 21\alpha + r$ بما أن $0 \le r < 3$

فإن $n = 21\alpha$ ، $n = 21\alpha + 1$ أو $n = 21\alpha + 2$. $\alpha \in \mathbb{N}$,

24 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث :

$a + b = 416$ و $a = bk + 61$ مع $b > 61$.

ومنه $bk + 61 + b = 416$ أي $b(k+1) = 355$ إذن b قاسم للعدد 355 ولدينا $355 = 5\times 71$.قواسم 355 هي 1،

5 ، 71 و 355 بما أن $b > 61$ فإن $b = 71$ أو $b = 355$.

إذا كان $b = 71$ فإن $a = 416 - 71 = 345$.

إذا كان $b = 355$ $a = 416 - 355 = 61$.

25 استعمال خوارزمية أقليدس لتعيين $PGCD(a,b)$:

أ ـ $a = 315$ و $b = 117$. $315 = 117\times 2 + 81$

$117 = 81\times 2 + 36$ ؛ $81 = 36\times 2 + 9$ ؛ $36 = 9\times 4 + 0$. ومنه $PGCD(315,117) = 9$.

ب ـ $a = 1260$ و $b = 528$. $1260 = 528\times 2 + 204$ ؛ $528 = 204\times 2 + 120$ ؛ $204 = 120\times 1 + 84$ ؛

$120 = 84\times 1 + 36$ ؛ $84 = 36\times 2 + 12$ ؛ $36 = 12\times 3 + 0$ ومنه $PGCD(1260,528) = 12$.

جـ ـ $a = 1380$ و $b = 972$.

$1380 = 972\times 1 + 408$ ؛ $972 = 408\times 2 + 156$ ؛

$408 = 156\times 2 + 96$ ؛ $156 = 96\times 1 + 60$ ؛ $96 = 60\times 1 + 36$ ؛ $60 = 36\times 1 + 24$ ؛ $36 = 24\times 1 + 12$ ؛

$24 = 12\times 2 + 0$ ومنه $PGCD(1380,972) = 12$.

26 n عدد طبيعي غير معدوم .