طرائق وامثلة في الهندسة الفضائية

1 -كيف تثبت الارتباط الخطي لشعاعين أو عدم إرتباطهما ؟

الإجابة : نتحقق أن مركبات الشعاعين متناسبة أو نكتب احد الأشعة بدلالة الأخر أي: $\vec{u} = k\vec{v}$ او $\vec{v} = k\vec{u}$ وعدم الإرتباط الخطي يعني أن المساواة السابقة غير محققة

مثال الشعاعان $\vec{u}(1;-2;3)$ و $\vec{v}(-3;6;-9)$ مرتبطان خطيا لان

نضع $\vec{v} = k\vec{u}$ ومنه الجملة $\begin{cases} -3 = k \\ 6 = -2k \\ -9 = 3k \end{cases}$ بحل الجملة نجد $k = -3$ من المعادلات الثلاث أي : $\vec{v} = -3\vec{u}$

تطبيقات : تطبق لإثبات استقامية ثلاث نقط أو إثبات ان ثلاث نقط تعين مستوي أو كتابة تمثيل وسيطي لمستقيم أو توازي مستقيمين أو توازي مستويين أو تعامد مستقيم ومستوي ، او كتابة تمثيل وسيطي لمستوي

1-1) إثبات استقامية ثلاث نقط : بين أن النقط $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(3;4;1)$ على استقامية

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ ولدينا $\overrightarrow{AC}(2;2;-2)$ ومنه $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه الجملة $\begin{cases} -1 = 2k \\ -1 = 2k \\ 1 = -2k \end{cases}$ بحل الجملة نجد $k = -\frac{1}{2}$

من المعادلات الثلاث أي : $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A و B و C على استقامية

1-2) إثبات ان ثلاث نقط تعين مستوي : النقط A، B، C تعين مستوي إذا لم تكن على استقامية

مثال : بين أن النقط $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$ تعين مستوي

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ ولدينا $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ ومنه $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه الجملة $\begin{cases} -1 = -2k \\ -1 = -5k \\ 1 = -k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{5} \\ k = -1 \end{cases}$

تناقض أي $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A، B، C تعين مستوي

1-3) كتابة تمثيل وسيطي لمستقيم : لكتابة تمثيل وسيطي لمستقيم يشمل نقطتان A و B ناخذ نقطة كيفية M ولدينا: $M \in (AB)$ يعني أن $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ، ولكتابة تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ) يشمل A وشعاع توجيه له $\vec{u}$ ناخذ نقطة كيفية M ولدينا: $M \in (\Delta)$ يعني أن $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{u}$ أي $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

مثال : اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث $A(1;2;3)$ و $B(0;1;4)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ ولتكن $M(x;y;z)$: $M \in (AB)$ يعني $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ولدينا $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$

يعني أن $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ $\begin{cases} x-1 = -t \\ y-2 = -t \\ z-3 = t \end{cases}$ اي $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = -t+2 \\ z = t+3 \end{cases}$

- اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل $A(1;2;3)$ و $\vec{u}(1;3;-2)$ شعاع توجيه له

لتكن $M(x;y;z)$: $M \in (\Delta)$ يعني $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ ولدينا $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$

يعني أن $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ $\begin{cases} x-1 = t \\ y-2 = 3t \\ z-3 = -2t \end{cases}$ اي $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases}$

1-4) توازي مستقيمين: لإثبات توازي مستقيمين يكفي إثبات توازي شعاعي توجيههما

مثال :أثبت ان (d) و $(\acute{d})$ المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين على التوالي $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}$ ، $\begin{cases} x = 3\acute{t} \\ y = 1+\frac{1}{2}\acute{t} \\ z = 3-\frac{1}{2}\acute{t} \end{cases}$ متوازيان

لدينا $\vec{u}(2;-1;1)$ شعاع توجيه لـ (d) و $\vec{v}\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ شعاع توجيه لـ $(\acute{d})$ ولدينا $\vec{u} = -2\vec{v}$ ومنه (d) و $(\acute{d})$ متوازيان

1-5) توازي مستويين: لإثبات توازي مستويين يكفي إثبات توازي شعاعيهما الناظميين

مثال : بين ان المستويين (P) و (Q) حيث: $(P): -x-2y+\frac{1}{2}z-1 = 0$ ، $(Q): 2x+4y-z = 0$ متوازيان

لدينا $\vec{n}(2;4;-1)$ شعاع ناظمي لـ (Q) و $\vec{n}\left(-1;2;\frac{1}{2}\right)$ شعاع ناظمي لـ (P) ولدينا $\vec{n}=-2\vec{n}$ ومنه (P) و (Q)متوازيان

6-1)تعامد مستقيم ومستوي: لإثبات تعامد مستقيم على مستوي يكفي إثبات توازي شعاع توجيه المستقيم مع الشعاع الناظمي للمستوي

مثال : بين ان (Δ) ذا التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t+2 \\ z=5-2t \end{cases}$ والمستوي(P) ذو المعادلة $2x+6y-4z+1=0$ متعامدان

لدينا $\vec{n}(2;6;-4)$ شعاع ناظمي لـ(P) و $\vec{u}(1;3;-2)$ شعاع توجيه لـ(Δ)ولدينا$\vec{n}=2\vec{u}$ ومنه (Δ)عمودي على (P)

ملاحظة : إذا كان مستقيم عمودي على مستقيمين غير متوازيان من مستوي فهو عمودي على المستوي بأكمله

7-1)كتابة تمثيل وسيطي لمستوي:لكتابة تمثيل وسيطي لمستوي معرف بثلاث نقط ليست على استقامية A، B، C

ناخذ نقطة كيفية M ولدينا : $M\in(ABC)$ يعني أن أي $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ ، ولكتابة تمثيل وسيطي لمستوي (P)يشمل A وأساس له $(\vec{u};\vec{v})$ نأخذ نقطة كيفية M ولدينا: $M\in(\text{P})$ يعني أن $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}+s\vec{v}$

مثال : أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) حيث : $A(1;2;3),B(0;1;4),C(-1;-3;2)$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و$\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ ولتكن $M(x;y;z)$: $M\in(ABC)$ يعني $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$

ولدينا$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ ، $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ يعني أن $\begin{cases} x-1=-t-2s \\ y-2=-t-5s \\ z-3=t-s \end{cases}$

اي $\begin{cases} x=-t-2s+1 \\ y=-t-5s+2 \\ z=t-s+3 \end{cases}$

- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي(P) الذي اساسه $(\vec{u};\vec{v})$ ويشملA حيث : $A(1;2;3),\vec{u}(0;1;4),\vec{v}(-1;-3;2)$

لتكن $M(x;y;z)$: M من المستوي(P) يعني $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}+s\vec{v}$ ولدينا$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ ،

$\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}+s\vec{v}$يعني أن $\begin{cases} x-1=-s \\ y-2=t-3s \\ z-3=4t+2s \end{cases}$ اي $\begin{cases} x=-s+1 \\ y=t-3s+2 \\ z=4t+2s+3 \end{cases}$

2 -كيف نثبت تعامد شعاعين او عدم تعامدهما ؟

الإجابة : نتحقق ان الجداء السلمي لهما معدوم ، وإذا كان غير معدوم فهما ليسا متعامدان

ولدينا الجداء السلمي للشعاعين: $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(\acute{a};\acute{b};\acute{c})$ هو : $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=a\acute{a}+b\acute{b}+c\acute{c}}$

مثال:الشعاعان $\vec{u}(1;-2;1)$ و $\vec{v}(-3;1;5)$ متعامدان لان : $(-3)\times1+1\times(-2)+5\times1=0$

تطبيقات : تطبق لكتابة معادلة مستوي يشمل نقطة وعلم شعاع ناظمي له ، لكتابة معادلة مستوي يشمل ثلاث نقاط ليست على استقامية ، لكتابة معادلة مستوي يشمل نقطة وعلم اساس له ، لكتابة معادلة مستوي يحوي مستقيمين،لإثبات تعامد مستويين ،لإثبات توازي مستقيم ومستوي ، لإيجاد شعاع توجيه لمستقيم تقاطع مستويين

1-2)المعادلة الديكارتية لمستوي يشمل نقطة A و$\vec{n}$ شعاع ناظمي له: المستوي الذي يشمل النقطة A وشعاع ناظمي له $\vec{n}$ هو مجموعة النقط M بحيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

مثال : - اكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل $A(1;2;3)$ و$\vec{n}(1;-1;-2)$ شعاع ناظمي له

لتكن $M(x;y;z)$: $M\in(P)$ يعني $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ ولدينا $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ ومنه $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ يعني ان :

$(x-1)\times1+(-1)\times(y-2)+(-2)\times(z-3)=0$ أي $x-y-2z+7=0$

2-2)المعادلة الديكارتية لمستوي يشمل نقطة ثلاث نقط ليست على استقامية: هي من الشكل$ax+by+cz+d=0$

لكتابة معادلة المستوي الذي يشمل ثلاث نقط ليست على استقامية A وB، C نعين أولا شعاع ناظمي له $\vec{n}(a;b,c)$ وهو يحقق :

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ نجد جملة من ثلاث مجاهيلa و b و c ومعادلتين نحل الجملة والحل ليس وحيد نختار احد النقط لتعيين d

مثال : أكتب معادلة المستوي (ABC) حيث: $A(1;2;3),B(0;1;4),C(-1;-3;2)$

ليكن $\vec{n}(a;b,c)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) فلدينا $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ و لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و$\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$

ومنه $\begin{cases} -a-b+c=0 \\ -2a-5b-c=0 \end{cases}$ بوضع $c=1$: [نختار احد المجاهيل بطريقة اختيارية غير معدوم وفي حالة كونه معدوم

أنظر الملاحظة اسفل] نجد $\begin{cases}-a-b=-1\\-2a-5b=1\end{cases}$ بحل الجملة نجد $b=-1$ و$a=2$ ومنه معادلة (ABC) من الشكل :
$2x-y+z+d=0$ ، نختار أحد النقط ولتكن Bونعوض إحداثياها في المعادلة نجد $2\times(0)-1+4+d=0$ اي:
$d=-3$ ومنه معادلة (ABC) هي : $2x-y+z-3=0$
ملاحظة : أحد المجاهيل المختارة له قيمة في العموم غير معدومة ، لان إختياره معدوم يفضي عموما إلى إنعدام البقية وهو في هذه الحالة ليس شعاع ناظمي ، ولكن يمكن لأحد الإحداثيات في شعاع ناظمي الإنعدام وقد يكون الذي اخترناه ولتفادي هذا الإشكال قبل الإختيار نلاحظ تناسب معاملات البقية إذا كانت متناسبة فهو معدوم بالضرورة
مثال: أكتب معادلة المستوي (ABC) حيث: $A(1;2;3),B(-1;3;1),C(3;1;4)$
ليكن $\vec{n}(a;b,c)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) فلدينا $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\\\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\end{cases}$ و لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;-2)$ و$\overrightarrow{AC}(2;-1;1)$
ومنه $\begin{cases}-2a+b-2c=0\\2a-b+c=0\end{cases}$ بوضع: $c\neq 0$ نجد تناقض في حل الجملة لأن معاملي a ومعاملي b متناسبة $\frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}$
ومنه في هذه الحالة $c=0$

(3-2)كتابة معادلة مستوي يشمل نقطة وعلم اساس له: لكتابة معادلة المستوي الذي يشمل نقطةA و$(\vec{u};\vec{v})$ أساس له نعين أولا شعاع ناظمي له $\vec{n}(a;b,c)$ وهو يحقق : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{v}.\vec{n}=0\end{cases}$ ونعين a و b و c كما سبق في **(2-2)**

(4-2)لكتابة معادلة مستوي يحوي مستقيمين متوازيين : لكتابة معادلة مستوي يحوي مستقيمين متوازيين نختار نقطة من المستقيم الاول ونقطتين من الثاني ونكتب معادلة المستوي المعرف بثلاث نقط ليست على استقامية كما في **(2-2)**

مثال :المستقيمان (d) و$(\acute{d})$ المعرفان على التوالي بـ: $\begin{cases}x=3+2t\\y=3-t\\z=t\end{cases}$ ، $\begin{cases}x=3\acute{t}\\y=1+\frac{1}{2}\acute{t}\\z=3-\frac{1}{2}\acute{t}\end{cases}$ متوازيان **(1-4)**

للإختيار نقطة من مستقيم معرف وسيطيا نعطي قيمة كيفية للوسيط نجد نقطة

النقطة$A(3;3;0)$نقطة من(d) بأخذ$t=0$، $B(0;1;3)$ و$C(6;3;2)$ نقطتان من$(\acute{d})$بأخذ$\acute{t}=0$و$\acute{t}=2$ على الترتيب
ثم نكتب معادلة المستوي (ABC) هو المستوي الذي يحوي (d) و$(\acute{d})$

(5-2)لكتابة معادلة مستوي يحوي مستقيمين متقاطعين : لكتابة معادلة مستوي يحوي مستقيمين متقاطعين نعين نقطة التقاطعA وليكن $\vec{u}$ و$\vec{v}$ شعاعي توجيه هذين المستقيمين
نعين اولا شعاع ناظمي له $\vec{n}(a;b,c)$ وهو يحقق $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{v}.\vec{n}=0\end{cases}$ ونعينa وb وc كما سبق في**(2-2)** وd تعين من كونAنقطة منه

مثال:المستقيمان (d) و$(\acute{d})$ المعرفان على التوالي بـ: $\begin{cases}x=-4+2t\\y=3-t\\z=t\end{cases}$ ، $\begin{cases}x=3\acute{t}\\y=1+2\acute{t}\\z=2-\acute{t}\end{cases}$ يتقاطعان في النقطة $A(0;1;2)$ لاحظ الطريقة **(7)**
الشعاعان $\vec{u}(2;-1,1)$ و$\vec{v}(3;2,-1)$ شعاعي توجيه لـ (d)و$(\acute{d})$ على الترتيب وليكن $\vec{n}(a;b,c)$ شعاع ناظمي للمستوي الذي يحوي (d)و$(\acute{d})$ فهو يحقق: $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{v}.\vec{n}=0\end{cases}$ ونكمل العمل كما في الطريقة **(2-2)**

(6-2) لإثبات تعامد مستويين :لإثبات تعامد مستويين يكفي إثبات تعامد شعاعيهما الناظميين
مثال: بين ان المستويين (P) و (Q) حيث:$(P):x+2y-3z+1=0$ ، $(Q):x+y+z+1=0$ متعامدان
لدينا $\vec{n}(1;2;-3)$ شعاع ناظمي لـ(P) و$\vec{\acute{n}}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (Q) ولدينا
$\vec{n}.\vec{\acute{n}}=(1)\times 1+(2)\times(1)+(-3)\times(1)=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{\acute{n}}$ ومنه (P) و (Q)متعامدان

(7-2) لإثبات توازي مستقيم ومستوي: لإثبات توازي مستقيم و مستوي يكفي إثبات تعامد شعاع توجيه المستقيم مع الشعاع الناظمي للمستوي
مثال : بين ان (Δ) ذا التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=-4+t\\y=3+t\\z=t\end{cases}$ والمستوي(P) ذو المعادلة $x+2y-3z+1=0$ متوازيان
لدينا $\vec{n}(1;2;-3)$ شعاع ناظمي لـ (P) و$\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ولدينا

$\vec{n}.\vec{u} = (1)\times 1 + (2)\times(1) + (-3)\times(1) = 0$ ومنه $\vec{n} \perp \vec{u}$ ومنه (P) و (Δ) متوازيان

(8-2) لإيجاد شعاع توجيه لمستقيم الناتج من تقاطع مستويين: إذا كان (P) و (Q) متقاطعان و$\vec{n}$ و$\vec{n'}$ شعاعيهما الناظميان فإن :

ليكن $\vec{u}(a;b,c)$ شعاع توجيه لمستقيم تقاطعهما يعني أن $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ \vec{u}.\vec{n'}=0\end{cases}$ ونعين a و b و c كما سبق في **(2-2)**

مثال : بين ان المستويين (P) و (Q) حيث: $(P): x+2y-3z+1=0$ ، $(Q): x+y+z+1=0$ يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين شعاع توجيه له

لدينا $\vec{n}(1;2;-3)$ شعاع ناظمي لـ(P) و $\vec{n'}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (Q) ولدينا $\vec{n}$ لا يوازي $\vec{n'}$ لان $\vec{n}$ يوازي $\vec{n'}$ يعني ان ومنه $\vec{n} = k\vec{n'}$ ومنه الجملة $\begin{cases}1=k\\2=k\\-3=k\end{cases}$ و هذا تناقض اي ان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين شعاع توجيه له : نضع $\vec{u}(a;b,c)$ شعاع توجيه(Δ) فلدينا : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ \vec{u}.\vec{n'}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}a+2b-3c=0\\ a+b+c=0\end{cases}$ بوضع: $c=1$

نجد $\begin{cases}a+2b=3\\ a+b=-1\end{cases}$ بحل الجملة نجد $b=4$ و$a=-5$ ومنه $\vec{u}(-5;4,1)$ شعاع توجيه(Δ)

(3) كيف نثبت أن ثلاثة أشعة من نفس المستوي ؟

طريقة: لإثبات أن ثلاثة أشعة من نفس المستوي يكفي كتابة احد الاشعة بدلالة الشعاعين الآخرين

مثال : الأشعة $\vec{u}(1;2,-3)$ و$\vec{v}(2;2,-4)$ و$\vec{w}(3;2,-5)$ هي من نفس المستوي لان :

بوضع: $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ نحصل بمساواة المركبات مع بعضها على الجملة: $\begin{cases}1=2\alpha+3\beta \cdots (1)\\ 2=2\alpha+2\beta \cdots (2)\\ -3=-4\alpha-5\beta \cdots (3)\end{cases}$

بإختيار مثلا المعادلتين (1) و(2) نجد الجملة : $\begin{cases}1=2\alpha+3\beta\\ 2=2\alpha+2\beta\end{cases}$ بحل الجملة نجد : $\beta=-1$ و$\alpha=2$

بالتعويض في (3) نجد: $-4(2)-5(-1)=-3$ وهي محققة إذا $\vec{u}=2\vec{v}-\vec{w}$ ومنه هي من نفس المستوي

ملاحظة : لو لم تتحقق المعادلة (3) فالأشعة ليست من نفس المستوي نقول عنها في هذه الحالة انها أساس للفضاء

(4) كيف نثبت أن أربع نقط من نفس المستوي ؟

طريقة لإثبات ان اربع نقط A وB، C، D من نفس المستوي يكفي إثبات مثلا ان الأشعة$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي

(5) كيف نعين معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$ **؟**

طريقة :نعين I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ثم نعين معادلة المستوي الذي يشمل I و$\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له ..الطريقة **(2-1)**

(6) ماهي الوضعيات النسبية لمستويين وكيف ندرس ذلك ؟

المستويان في الفضاء هما إما متوازيان (توازي انفصال او توازي تطابق) وإما يتقاطعان وفق مستقيم

طريقة : يكون مستويان متوازيان إذا توازا شعاعيهما الناظميان ومتقاطعان وفق مستقيم إذا لم يتحقق التوازي لاحظ **(1-5)**

(7) ماهي الوضعيات الممكنة لمستقيمين وكيف ندرس ذلك ؟

المستقيمان في الفضاء هما إما متوازيان واما يتقاطعان وإما ليسا من نفس المستوي

طريقة 1:يكون مستقيمان متوازيان إذا توازا شعاعي توجيههما وإذا لم يكونا متوازيان فقد يكونا متقاطعان وإذا لم يتحقق التوازي ولا التقاطع فهما ليسا من نفس المستوي

طريقة 2:إذا أعطي المستقيمان الغير متوازيان بتمثيليهما الوسيطيين فلتأكد أنهما متقاطعان نساوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضها نجد جملة من ثلاث معادلات ومجهولين نختار معادلتين من الثلاث ونعين المجهولين ثم نعوض في المعادلة المتبقية إذا تحققت فهما متقاطعان وإذا لم تتحقق فهما ليسا من نفس المستوي

مثال : هل المستقيمان (d) و(d') المعرفان على التوالي بـ: $\begin{cases}x=-4+2t\\ y=3-t\\ z=t\end{cases}$ ، $\begin{cases}x=3t'\\ y=1+2t'\\ z=2-t'\end{cases}$ متوازيان ، متقاطعان ، ليسا من نفس المستوي

الشعاعان $\vec{u}(2;-1,1)$ و$\vec{v}(3;2,-1)$ شعاعي توجيه لـ (d)و(d') وهما غير متوازيان لانه لا يوجد k بحيث $\vec{v}=k\vec{u}$ [الطريقة$(\mathbf{1})$]ومنه قد يكونان متقاطعان لذا نضع $\begin{cases}3t' = -4+2t \cdots (1)\\ 1+2t' = 3-t \cdots (2)\\ 2-t' = t \cdots (3)\end{cases}$

باختيار مثلا المعادلتين (2) و(3) نجد الجملة $\begin{cases} 1+2\grave{t}=3-t \\ 2-\acute{t}=t \end{cases}$ بحل الجملة نجد : $\grave{t}=0$ و $t=2$

بالتعويض في (1) نجد: $(2)2+4-=0\times 3$ وهي محققة ومنه (d) و$(\acute{d})$ متقاطعان

ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض t في التمثيل الوسيطي لـ (d) او $\grave{t}$ في التمثيل الوسيطي لـ $(\acute{d})$

وهنا بتعويض $\grave{t}$ نجد إحداثيات نقطة التقاطع هي $(0;1;2)$

(8) كيف نعين نقطة تقاطع مستقيم ومستوي ؟

طريقة :إذا كان (d) مستقيم معرف بـ: $\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t\cdots(*) \\ z=z_0+\gamma t \end{cases}$ و(P) المستوي معرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$

وكان (d) و(P) غير متوازيان اي $\vec{n}(a;b;c)$ ليس عمودي لـ على $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ [الطريقة **(2-7)**] فإن (d) و(P) يتقاطعان في نقطة وحيدة لتعيين إحداثياتها نعوض x وy وz المعطاة بدلالة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي ثم نحل المعادلة ذات المجهول t نعوض قيمتها في الجملة $(*)$ نجد إحداثيات نقطة التقاطع

مثال:عين نقطة تقاطع المستقيم (d) المعرف بـ: $\begin{cases} x=1+t\cdots(1) \\ y=2+t\cdots(2) \\ z=-1+t\cdots(3) \end{cases}$ والمستوي (P) الذي معادلته $x+y+z+4=0$

بتعويض (1) و(2)و(3) في معادلة (P) نجد : $(1+t)+(2+t)+(-1+t)+4=0$ بحل الجملة نجد $t=-2$

بالتعويض t بقيمتها في جملة (d) نجد: $\begin{cases} x=1+(-2) \\ y=2+(-2) \\ z=-1+(-2) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=-3 \end{cases}$ اي إحداثيات نقطة التقاطع هي $(-1;0;-3)$

(9) ماهي الوضعيات الممكنة لمستقيم ومستوي وكيف ندرس ذلك ؟

الوضعيات الممكنة بين مستقيم ومستوي هي التوازي [توازي انفصال أو توازي احتواء] وإما التطابق

طريقة1: لدراسة الوضع الممكن بين مستقيم (d) ومستوي (P) ندرس اولا توازيهما [الطريقة **(2-7)**] إن لم يكن متوازيان قد يكونان متقاطعان [الطريقة **(8)**] إن لم يكن متقاطعان فهما ليسا من نفس المستوي

طريقة2: لدراسة الوضع الممكن بين مستقيم (d) ومستوي (P) نتبع الطريقة **(8)** في إيجاد قيمة لـ t إذا قبلت المعادلة حلا وحيد فهما متقاطعان إذا لم تقبل حلا فهما متوازيان توازي إنفصال وإذا قبلت مالانهاية من الحلول فإن (d) محتوى في (P)

مثال1:بين أن المستقيم (d) المعرف بـ: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases}$ محتوى في المستوي (P) الذي معادلته $x+y+z-2=0$

بتعويض الجملة في معادلة (P) نجد : $(1+t)+(2-2t)+(-1+t)-2=0$ بالتبسيط نجد $0\times t=0$ وهي محققة مهما كانت قيمة t أي (d) محتوي في (P)

ملاحظة: يمكن إثبات كذلك انهما متوازيان [الطريقة **(2-7)**] ثم نختار نقطة من (d) ونجد انها تحقق معادلة (P) ،او نختار نقطتان من (d) ونجد انهما تحققان معادلة (P)

مثال2: بين أن المستقيم (d) المعرف بـ: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=5+t \end{cases}$ يوازي المستوي (P) الذي معادلته $x+y+z-2=0$

بتعويض الجملة في معادلة (P) نجد : $(1+t)+(2-2t)+(5+t)-2=0$ بالتبسيط نجد $0\times t+6=0$ وهي غير محققة مهما كانت قيمة t أي (d) يوازي (P) وغير محتوى فيه

ملاحظة: يمكن إثبات كذلك انهما متوازيان [الطريقة **(2-7)**] ثم نختار نقطة من (d) ونجد انها لاتحقق معادلة (P)

(10) كيف نجد المسافة بين نقطتين ؟

المسافة بين النقطتين A وB، هي AB وهي $\|\overrightarrow{AB}\|$ ولدينا إذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ فإن :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

(11) كيف نجد المسافة بين نقطة ومستقيم ؟

طريقة1:لأيجاد المسافة بين النقطة A والمستقيم (d) نعين المسقط العمودي H للنقطة A على (d) ثم نحسب المسافة AH [الطريقة **(14)**]

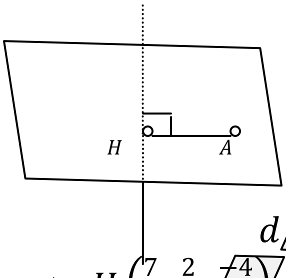
طريقة 2:نكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل A وعمودي على (d) أي شعاع توجيه (d) هو شعاع ناظمي له [الطريقة **(2-1)**] نعين نقطة تقاطع (P) و(d) [الطريقة **(8)**] ولتكن H ومنه المسافة بين A والمستقيم (d) هي المسافة AH

طريقة 3: (d) المعرف بـ: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$ هو مجموعة النقط $M_t(x_0 + \alpha t; y_0 + \beta t; z_0 + \gamma t)$

لإيجاد المسافة بين $A(x_A; y_A; z_A)$ والمستقيم (d) نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ كما يلي

$f(t) = AM_t = \sqrt{(x_0 + \alpha t - x_A)^2 + (y_0 + \beta t - y_A)^2 + (z_0 + \gamma t - z_A)^2}$ ندرس تغيرات هذه الدالة على $\mathbb{R}$

القيمة الحدية الصغري هي المسافة بين A و (d)



أمثلة : أوجد المسافة بين A و (d) حيث : $A(1; 1; 1)$ و $(d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

باستعمال الطريقة 2 : لدينا $\vec{u}(2; 1; 1)$ شعاع توجيه لـ (d) وليكن (P) المستوي العمودي عليه (d) ويشمل A شعاع ناظمي له $\vec{u}$ فمعادلته من الشكل: $2x + y + z + d = 0$

وبما أن A نقطة منه فإحداثياتها تحقق المعادلة أي $2(1) + (1) + (1) + d = 0$ ومنه $d = -4$

أي معادلة (P) هي $2x + y + z - 4 = 0$ نعين نقطة تقاطع (P) و (d) [الطريقة **(8)**] ولتكن $H\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-4}{3}\right)$ وهي

مسقط A على (d) المسافة بين A و (d) هي: $\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^2}$ لان $\overrightarrow{AH}\left(\frac{4}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{-7}{3}\right)$

ومنه المسافة بين A و (d) هي: $\sqrt{\frac{66}{9}}$ أي: $\sqrt{\frac{22}{3}}$

باستعمال الطريقة3: نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(t) = AM_t = \sqrt{(3 + 2t - 1)^2 + (1 + t - 1)^2 + (-1 + t - 1)^2}$$

أي $f(t) = \sqrt{6t^2 + 4t + 8}$ وبدراسة تغيرات الدالة نجد: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و $f'(t) = \frac{12t + 4}{2\sqrt{6t^2 + 4t + 8}}$ جدول التغيرات للدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\sqrt{6\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{-1}{3}\right) + 8} = \sqrt{\frac{22}{3}}$	↗ $+\infty$

(12) كيف نجد المسافة بين نقطة ومستوي ؟

طريقة 1: لأيجاد المسافة بين النقطة A والمستقيم (P) نعين المسقط العمودي H للنقطة A على (P) ثم نحسب المسافة AH

طريقة2: نكتب معادلة المستقيم (d) الذي يشمل A وعمودي على (P) أي شعاع توجيهه هوالشعاع الناظمي لـ (P) [الطريقة **(1-3)**]

نعين نقطة تقاطع (P) و (d) [الطريقة **(8)**] ولتكن H ومنه المسافة بين A والمستقيم (P) هي المسافة AH

طريقة 3: إذا كان (P) مستوي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ وكانت $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء فان $d[A; (P)]$

المسافة بين A و (P) تعطى بالعلاقة: $d[A; (P)] = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

(13) كيف نعين المسقط العمودي لنقطة على مستوي ؟

طريقة1: نكتب معادلة المستقيم (d) الذي يشمل A وعمودي على (P) أي شعاع توجيهه هوالشعاع الناظمي لـ (P) [الطريقة **(1-3)**]

نعين نقطة تقاطع (P) و (d) [الطريقة **(8)**] ولتكن H النقطة H هي المسقط العمودي لـ A على (P)

(14) كيف نعين المسقط العمودي لنقطة على مستقيم ؟

طريقة 1: المستقيم (d) المعرف بـ: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$ هو مجموعة النقط $M_t(x_0 + \alpha t; y_0 + \beta t; z_0 + \gamma t)$

لإيجاد المسقط العمودي لـ $A(x_A; y_A; z_A)$ على المستقيم (d) ولتكن H فإن إحداثيات H من الشكل $(x_0 + \alpha t; y_0 + \beta t; z_0 + \gamma t)$

حيث t مجهول يطلب تعيينة ولدينا H تحقق $\vec{u}.\overrightarrow{AH} = 0$ حيث $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ بحل المعادلة تجد قيمة المجهول t

طريقة 2: نكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل A وعمودي على (d) أي شعاع توجيه (d) هو شعاع ناظمي له [الطريقة **(1-2)**]

نعين نقطة تقاطع (P) و (d) [الطريقة **(8)**] ولتكن H هي المسقط العمودي لـ A على (d)

أمثلة : أوجد المسقط العمودي لـ A على (d) حيث : $A(1;1;1)$ و $(d):\begin{cases} x=3+2t\\ y=1+t\\ z=-1+t\end{cases}$

طريقة 1: لتكن H المسقط العمودي لـ A على (d) إحداثياتها من الشكل$(3+2t;1+t;-1+t)$ ولدينا $\vec{u}(2;1;1)$ شعاع توجيه لـ (d)ومنه $\vec{u}.\overrightarrow{AH}=2\times(2+2t)+1\times(t)+1\times(-2+t)=6t+2$ أي$\vec{u}.\overrightarrow{AH}=0$ يعني: $t=-\frac{1}{3}$

ومنه $H\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$

الطريقة 2: لاحظ المثال في الطريقة **(11)**

(15) كيف نعين المسقط العمودي لنقطة على مستوي معرف وسيطيا ؟

مثال ليكن(P) المعرف وسيطيا كما يلي $\begin{cases} x=2\alpha+3\beta+1\cdots(1)\\ y=2\alpha+2\beta+2\cdots(2)\\ z=-4\alpha-5\beta+3\cdots(3)\end{cases}$ عين المسقط العمودي لـ$A(1;1;1)$ على (P)

لدينا $(\vec{u};\vec{v})$ أساس لـ(P) حيث $\vec{u}(2;2,-4)$ و$\vec{v}(3;2,-5)$ إذا كانت H المسقط العمودي لـ A على (d) إحداثياتها من الشكل$(2\alpha+3\beta+1;2\alpha+2\beta+2;-4\alpha-5\beta+3)$ ولدينا $\begin{cases}\vec{u}..\overrightarrow{AH}=0\\ \vec{v}..\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$ ولدينا

ومنه $\overrightarrow{AH}(2\alpha+3\beta;2\alpha+2\beta+1;-4\alpha-5\beta+2)$

$\begin{cases}2(2\alpha+3\beta)+2(2\alpha+2\beta+1)+(-4)(-4\alpha-5\beta+2)=0\\ 3(2\alpha+3\beta)+2(2\alpha+2\beta+1)+(-5)(-4\alpha-5\beta+2)=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}24\alpha+30\beta=7\\ 30\alpha+38\beta=8\end{cases}$ بحل الجملة نجد :

$\alpha=\frac{29}{3}$ و$\beta=\frac{-45}{6}$ بالتعويض $H\left(2\left(\frac{29}{3}\right)+3\left(\frac{-45}{6}\right)+1;2\left(\frac{29}{3}\right)+2\left(\frac{-45}{6}\right)+2;-4\left(\frac{29}{3}\right)-5\left(\frac{-45}{6}\right)+3\right)$

أي $H\left(\frac{-13}{6};\frac{16}{3};\frac{11}{6}\right)$

(16) كيف نكتب تمثيل وسيطي لمستوي معرف بنقطة واساس ؟

لكتابة تمثيل وسيطي للمستوي(P) الذي يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و$(\vec{u};\vec{v})$ أساس له لدينا :

$M(x;y;z)$: $M\in(P)$ يعني الأشعة $\overrightarrow{AM}$ و$\vec{u}$ و$\vec{v}$ من نفس المستوي ونتبع [الطريقة **(3)**]

مثال :أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي(P)الذي يشمل $A(1;1;1)$ و$(\vec{u};\vec{v})$ أساس له حيث : $\vec{u}(2;-1,1)$ و $\vec{v}(3;2,-1)$

لتكن $M(x;y;z)$: $M\in(P)$ يعني أن $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ نحصل بمساواة المركبات على: $\begin{cases}x-1=2\alpha+3\beta\\ y-1=-\alpha+2\beta\\ z-1=\alpha-\beta\end{cases}$

اي : $(P):\begin{cases}x=2\alpha+3\beta+1\\ y=-\alpha+2\beta+1\\ z=\alpha-\beta+1\end{cases}$

(17) كيف نكتب تمثيل وسيطي لمستوي معرف بثلاث نقط؟

لكتابة تمثيل وسيطي للمستوي(P) الذي يشمل النقطA، B، C لدينا :

$M(x;y;z)$: $M\in(P)$ يعني الأشعة $\overrightarrow{AM}$ و$\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ من نفس المستوي ونتبع [الطريقة **(3)**]

(18) كيف نختارنقطة من مستوي معرف بتتمثيله الوسيطي او بمعادلته الديكارتية ؟

لإختيار نقطة من مستوي معرف وسيطيا نعطي قيمتين للوسيطين α وβ ولإختيار نقطة من مستوي معرف بمعادلته الديكارتية نعطي قيمتين لمتغيرين ونجد الثالث وإذا كانت من متغيرين فقط نعطي قيمة لاحدهما ونجد الآخر والثالث كيفي وإذا كانت من متغير واحد نجد قيمته بحل معادلة من الدرجة الاولى والمتغيرين الثاني والثالث كيفيين

(19) كيف ننتقل من تمثيل ديكارتي لمستقيم إلى تمثيل وسيطي له ؟

طريقة : إذا كان (P) مستوي معادلته $ax+by+cz+d=0$ و: (Q) مستوي معادلته $\acute{a}x+\acute{b}y+\acute{c}z+\acute{d}=0$

وكان (P) و(Q) يتقاطعان في مستقيم فتمثيل ديكارتي له $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ \acute{a}x+\acute{b}y+\acute{c}z+\acute{d}=0\end{cases}$ لكتابة تمثيله الوسيطي نضع احد المجاهيل يساوي t ونحل جملة المعادلتين ذات المتغيرين x وy بدلالة t

مثلا :أكتب تمثلا وسيطيا للمستقيم التقاطع بين (P) و(Q) حيث:$(P):x+y+z+1=0$ و$(P):x+y-z+2=0$

بوضع $x=t$ نجد الجملة $\begin{cases} y+z=-1-t \\ y-z=-2-t \end{cases}$ بحل الحملة نجد: $\begin{cases} y=\frac{-3}{2}-t \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{-3}{2}-t \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

ملاحظة : لاحظ ان في هذا المثال لا يمكن وضع $z=t$ لان معاملات x و y متناسبة

حالة خاصة: إذا كانت معادلتي (P) و (Q) تحويان مجهولين فقط نحل الجملة ذات المعادلتين والمجهولين يأخذان قيمة ثابتة غير متعلقة بـ t والمجهول الثالث كيفي نأخذه يساوي t

مثلا : أكتب تمثلا وسيطيا للمستقيم التقاطع بين (P) و (Q) حيث: $(P): x+3z+1=0$ و $(P): x-z+2=0$

نحل الجملة $\begin{cases} x+3z+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$ بحل الحملة نجد: $\begin{cases} x=\frac{-7}{4} \\ z=\frac{1}{4} \end{cases}$ ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم هو $\begin{cases} x=\frac{-7}{4} \\ y=t \\ z=\frac{1}{4} \end{cases}$

(20) كيف ننتقل من تمثيل وسيطي لمستوي إلى معادلة ديكارتية له ؟

طريقة : لننتقل من تمثيل وسيطي لمستوي إلى معادلة ديكارتية له نختار معادلتن من الثلاث ونحل الحملة ذات المجهولين α و β بدلالة x و y مثلا حسب الإختيار ثم نعوض في المعادلة المتبقية

مثلا: لكتابة معادلة ديكارتية للمستوي المعرف وسيطيا كما يلي $\begin{cases} x=2\alpha+3\beta+1 \cdots (1) \\ y=-\alpha+2\beta+1 \cdots (2) \\ z=\alpha-\beta+1 \cdots (3) \end{cases}$ لدينا :

بإختيار مثلا المعادلتين (2) و (3) نجد الجملة : $\begin{cases} y=-\alpha+2\beta+1 \\ z=\alpha-\beta+1 \end{cases}$ بالجمع نجد حل الجملة $\begin{cases} \beta=y+z-2 \\ \alpha=y+2z-3 \end{cases}$

بالتعويض في (1)نجد: $x=2(y+2z-3)+3(y+z-2)+1$ بالتبسيط نجد $(P): x-5y-7z+11=0$

(21) كيف ننتقل من معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي له ؟

طريقة : نضع احد المجاهيل α والآخر β ونعين المتبقي بدلالة α و β

مثلا:تمثيل وسيطي للمستوي ذو المعادلة $x+y+z+3=0$ هو $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\alpha-\beta-3 \end{cases}$

تمثيل وسيطي للمستوي ذو المعادلة $x+y+3=0$ هو $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha-3 \\ z=\beta \end{cases}$

تمثيل وسيطي للمستوي ذو المعادلة $y+3=0$ هو $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-3 \\ z=\beta \end{cases}$

(22) معادلة سطح كرة في الفضاء ؟

الكرة في الفضاء هي مجموعة النقط M التي تبعد عن نقطة ثابتة بمسافة ثابتة

إذا كاننت النقطة الثابتة هي $A(x_A;y_A;z_A)$ والمسافة الثابتة هي R فلدينا $AM=R$ أي

$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2}=R$ ومنه بالتربيع نجد $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

(23) ماهي الوضعيات النسبية لمستقيم وسطح كرة في الفضاء وكيف نعين التقاطع ؟

المستقيم وسطح الكرة في الفضاء إما يتقاطعان في نقطتين وإما مماسي له وإما التقاطع هو المجموعة الخالية

طريقة: لإيجاد التقاطع بين مستقيم معرف وسيطيا بالشكل : $\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \cdots (*) \\ z=z_0+\gamma t \end{cases}$ وسطح كرة معرفة بمعادلة من الشكل $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ نعوض x و y و z المعطاة بدلالة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة سطح الكرة نجد معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول t إذا كان المميز سالب لا توجد حلول ومنه لا يوجد تقاطع لإذا كان المميز معدوم هناك حل مضاعف ومنه المستقيم مماسي للكرة نعوض قيمتها في الجملة $(*)$ نجد إحداثيات نقطة إذا كان المميز موجب هناك حلان متمايزان ومنه هناك نقطتي بين المستقيم وسطح الكرة نعوض قيمتي t في الجملة $(*)$ نجد إحداثيات نقطتي التقاطع

مثال : عين تقاطع (d) المعرف بـ : $\begin{cases} x = t \\ y = t \cdots (*) \\ z = t + 1 \end{cases}$ وسطح الكرة المعرفة بـ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5$

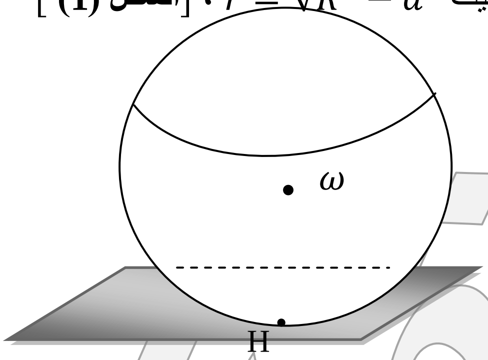
بالتعويض نجد $(t-1)^2 + t^2 + (t+1)^2 = 5$ اي $3t^2 + 2 = 5$ اي $\begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$ ومنه (d) و(P) يتقاطعان في نقطتين إحداثيتاهما $(1;1;2)$ و$(-1;-1;0)$

(24) ماهي الوضعيات النسبية لمستوي وسطح كرة في الفضاء وكيف نعين التقاطع ؟

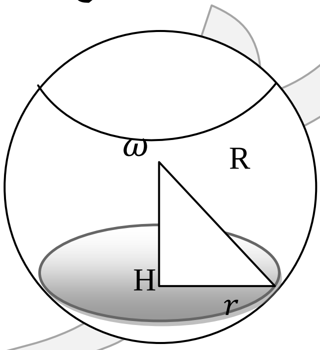
يتقاطع المستوي وسطح الكرة في الفضاء في دائرة او نقطة (المستوي مماسي لسطح الكرة) أو لا يوجد تقاطع بينهما

طريقة: (S)سطح الكرة التي مركزها ω ونصف قطرها R و(P)مستوي، d هي المسافة بينω والمستوي (P) [الطريقة**(12)**]

- إذا كانت $d > R$ فإن التقاطع هو المجموعة الخالية
- إذاكانت $d = R$ فإن التقاطع هو النقطة H حيثH المسقط العمودي لـ ω على (P) [الطريقة**(13)**] ، [**الشكل (2)**]
- إذاكانت $d < R$ فإن التقاطع هو الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها r حيث $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ، [**الشكل (1)**]



[**الشكل (1)**]



[**الشكل (1)**]

مثال:عين تقاطع المستوي (P)ذو المعادلة الديكارتية :$x + y + z - 3 = 0$ وسطح الكرة (S) التي معادلتها : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$

لدينا مركز (S) هو :$\omega(1;-2;3)$ ونصف قطرها $R = 3$ ولدينا $d[\omega;(P)] = \frac{|(1)+(-2)+(3)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ولدينا $3 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ومنه (P) يتقاطع مع (S) في دائرة نصف قطرها $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(3)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{3}}$

ومركزها H حيث H مسقط ω على (P) ولتعيينها لدينا :

ليكن (d) المستقيم الذي يشمل ω وعمودي على (P) فالشعاع الناظمي لـ (P)هو شعاع توجيه له ومنه تمثيله الوسيطي كما يلي:

$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 2 \cdots (*) \\ z = t + 3 \end{cases}$ نعين نقطة تقاطع (d) و(P) [الطريقة **(9)**]:$(t+1) + (t-2) + (t+3) - 3 = 0$

بحل المعادلة نجد $t = \frac{1}{3}$ بالتعويض في $(*)$ نجد:$H\left(\frac{4}{3};\frac{-5}{3};\frac{10}{3}\right)$

(25) ما هي الوضعيات النسبية لثلاث مستويات وكيف نعين تقاطعها؟

دراسة تقاطع ثلاث مستويات غير متطابقة مثنى مثني يؤول إلى حل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل وقد يكون خاليا أو نقطة أو مستقيم

طريقة: لدراسة تقاطع ثلاث مستويات غير متطابقة نختار مستويين وندرس توازيهما [الطريقة **(1-5)**]إذا كانا متوازيان فتقاطع المستويات الثلاث هو المجموعة الخالية مهما كان الوضع بالنسبة للمستوي الثالث وإذا كانا متقاطعين فيتقاطعان وفق مستقيم نكتب تمثيل وسيطي له[الطريقة **(19)**] ثم ندرس تقاطع هذا المستقيم مع المستوي الثالث [الطريقة **(9)**]

مثال: لنعين تقاطع المستويات(P) و $(\acute{P})$ و (Q)المعرفة بمعادلاتها : $x + y + 1 = 0$ ، $2x + y + 2z = 0$ ، $x + y + z + 2 = 0$على الترتيب

نأخذ المستويين (P) و$(\acute{P})$ وندرس توازيهما :لدينا $\vec{n}(1;1;0)$ و$\vec{\acute{n}}(2;1;2)$شعاعين ناظميين لـ (P) و$(\acute{P})$على الترتيب

نفرض أن ومنه $\vec{n} = k\vec{\acute{n}}$ ومنه الجملة $\begin{cases} 1 = 2k \\ 1 = k \\ 0 = 2k \end{cases}$ومنه $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = 1 \\ k = 0 \end{cases}$تناقض أي $\vec{n} \neq k\vec{\acute{n}}$ ومنه(P)و$(\acute{P})$ يتقاطعان في

مستقيم (d)معرف بالجملة $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$ نكتب تمثيل وسيطي لهذا المستقيم

بوضع $y=t$ نجد الجملة $\begin{cases} x=-1-t \\ 2z=-2x-t \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=-1-t \\ z=\frac{-2(-1-t)-t}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-1-t \\ y=\text{t} \\ z=1+\frac{1}{2}t \end{cases} \cdots (*)$

ندرس تقاطع (d) و(Q)

لدينا بتعويض الجملة$(*)$ في معادلة (Q) نجد: $(-1-t)+(\text{t})+\left(1+\frac{1}{2}t\right)+2=0$ بالتبسيط نجد $\frac{1}{2}\times t=-2$

ومنه قيمة $t=-4$ بالتعويض في $(*)$ نجد $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=-1 \end{cases}$ اي المستويات (P) و $(\grave{P})$ و (Q) تتقاطع في نقطة وحيدة

إحداثياتها $(3;-4;-1)$

ملاحظة بالإمكان أن يكون السؤال حل الجملة $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$ يمكن اعتبار المعادلة الأولى والثانية والثالثة

معادلات لثلاث مستويات وندرس تقاطعما كما سلف ذكره