## كــيفية إثبات قابلية للاشتقاق عند عدد

لدراسة قابلية اشتقاق دالة $f$ عند $a$ نتبع الخطوات التالية
1. نتأكد أن الدالة $f$ مستمرة عند $a$
2. أحسب $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

| إذا كان | فإن | المنحني الممثل للدالة $f$ يقبل |
|---|---|---|
| $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l (l \in \mathbb{R})$ | $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ | مماسا في النقطة ذات الفاصلة $a$ و معامل توجيه $f'(a)$ |
| $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ | $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $a$ | مماسا موازيا لحامل محور الترتيب في النقطة ذات الفاصلة $a$ |
| $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة | | |
| $\lim_{x \xrightarrow{<} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ | $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ على اليسار | يقبل نصف المماس على اليسار في النقطة ذات الفاصلة $a$ |
| $\lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ | $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ على اليمين | يقبل نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الفاصلة $a$. |

### تمرين محلول رقم 01

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 + 1$ و $(C)$ رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O; I; J)$
1. أدرس قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند 1. ثم عين العدد المشتق للدالة $f$ عند 1.
2. عين معادلة $(T)$ مماس المنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

**الحل:**

**1.قابلية للاشتقاق عند 1**

لدينا: $f(1+h) = (1+h)^2 + 1 = 1 + 2h + h^2 + 1 = 2 + 2h + h^2$ ومنه $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2 + 2h + h^2 - 2}{h}$

وبالتالي $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h + h^2}{h}$

و $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$

و $\lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2 + h = 2$

إذ ا $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$

ومنه $f'(1) = 2$

**2.المماس**

لدينا معادلة المماس هي $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

و $f'(1) = 1$ و $f(1) = 2$

ومنه $y = 2x - 2 + 2 = 2x$ وبالتالي: $(T): y = 2x$

## تمرين محلول رقم 02

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=|x|$ و $(C)$ رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I;J)$

1.أدرس استمرارية الدالة $f$ عند $0$.

2.هل الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند$0$؟ فسر النتيجة هندسيا.

**الحل**

**1..دراسة استمرارية الدالة $f$ عند $0$.**

لدينا $f(0)=0$

و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

ومنه الدالة $f$ مستمرة على $0$

**2. قابلية للاشتقاق عند$0$**

لدينا $\begin{cases} f(x)=-x; x\leq 0 \\ f(x)=x; x\geq 0 \end{cases}$

لنحسب

$$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{-h}{h}=-1$$

و $$\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{h}{h}=1$$

ونستنتج أن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند$1$.

**التفسير الهندسي**

$(C)$يقبل نصف المماس على اليسار في النقطة ذات الفاصلة $0$يقبل نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الفاصلة $0$.