نهائي رياضيات وعلوم

الدالة الأسية 2015

YousfiMath Yousfisifou804@yahoo.fr

الدرس الرابع

الكفاءة المستهدفة

- توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- ـ حل مشكلات بتوظيف الدوال الآسية .
- ـ معرفة وتفسير النهايات : $\lim_{x\to+\infty} e^x/x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$.
- ـ تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية y = `y التي تحقق 1= (0) y .
- نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستخدام مجدول(بتطبيق طريقة أولر)ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل.

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- استعمال مبرهنات وتعاريف
- استعمال المشتقات . طريقة اولر .تعريف الاشتقاق
- الدوال العددية

ضف لمعلوماتك اللوغاريتم مشتق من اسم الخوارزمي *Algoritmi* *الاسم اللاتيني . دالة الاس النبري*
لُوغارِيتْم (اسم) : عَدَد لِأَسَاس مَا هُو الأُسّ الَّذِي يُرْفَع إِلَيه الأَسَاس لِيَنْتُج ذَلِك الْعَدَد مثلا 125 ناتجة عن الاس 3 للعدد 5
النيبري هو الثابت في القيمة يكون غالبا واضح في معظم العمليات مثل العدد باي ....الخ

ســـــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: طريقة اولر (تطبيقات) 2:الدالة الاسية تعاريف وخواص 3: الدوال الاسية 4: الدوال الاسية عمليات 5: دراسة الدالة الاسية 6:دراسة الدالة $\exp\circ u$	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسســـــــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الأسة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الدالة الاسية طريقة اولر وتطبيقات تمهيدية (معادلة نفاضلية)

المكتسبات المستهدفة: التعرف على خصائص الدالة الاسية دراسة المعادلة التفاضلية ذات الخصائص $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط :01

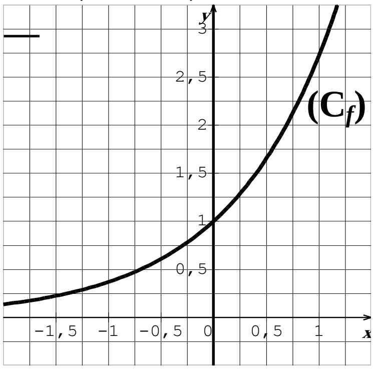
النشاط : ص 76 رقم 01

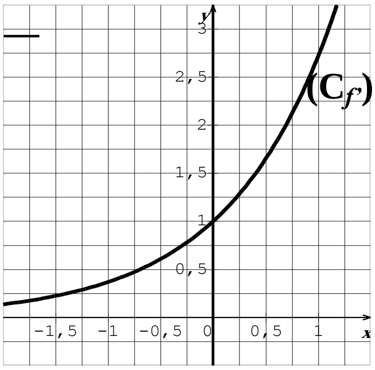
تذكير الدالة ثابتة على IR اذا كانت مشتقتها الأولى معدومة على IR

** 45دقيقة **

1.4 نــــشاط

إليك التمثيلان البيانيان (C_f) و $(C_{f'})$ لدالة f و دالتها المشتقة f' في معلمين مختلفين .





1- عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و f' .

2- أحسب كل من $f(0)$ و $f'(0)$.

3- أدرس إشارة كل من f و f' ثم اتجاه تغير كل منها .

4- عين جدول تغيرات كل من الدالتين f و f' .

5- ما هو تخمينك حول الدالتين f و f' .

6- نفرض أن $f=f'$ احسب f''' .

الحل: 1)- الدالتان f و f' معرفتان على $\mathbb{R}$

2)- $f(0)=1$ ، $f'(0)=1$

3)- دراسة إشارة كل من f و f' :

إن البيانين (C_f) و $(C_{f'})$ يقعان فوق محور الفواصل و عليه فمن أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x)\succ 0$ و $f(x)\succ 0$ وعليه f و f' متزايدتان على $\mathbb{R}$

4)- تعيين جدول التغيرات :

x	$-\infty \quad +\infty$
$f''(x)$	+
$f(x)$	↗

x	$-\infty \quad +\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

5)- المخمنة حول f و f' :

نلاحظ أن : $f(0)=f'(0)=1$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f'(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$$

و نقول أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)=f'(x)$

6)- اذا فرضنا أن $f=f'$ فإن :

$f'''=f'=f$ ومنه $f'''=f''=f$ إذن : $f'''=f$

النشاط مهم لمعرفة كيفية تمثيل منحنى الدالة وتمييزه

- تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

- نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستخدام مجدول (بتطبيق طريقة أولر) ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل.

- نقدم هذه الدالة في مرحلة مبكرة من السنة الدراسية قصد توظيفها في العلوم الفيزيائية.

- نستنتج من التعريف خواص الدالة الأسية. $\exp(x)>0$ ، $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. الترميز e^x ، النهايات والمنحنى الممثل لها.

- نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x=a$ تقبل حلا وحيدا نرمزله بالرمز $\ln a$ ، يمكن القول حينئذ أن الدالة $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية. لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية.

- تستنتج الخواص

تمرين مهم يساعد على البراهين في الدرس

طريقة اولر

مثال 1 *** لنعتبرالدالة f المعرفة بـ : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$
(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أنشئ المنحنى التقريبي (C_f) باستعمال طريقة أولر على المجال $[0;3]$ بخطوة $h=0,1$

2) أحسب القيمة التقريبية لـ $f(1)$

*** لنعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;5]$ بـ : $g(1)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{x}$

1) أنشئ المنحنى التقريبي (C_g) باستعمال طريقة أولر

2) عين القيمة التقريبية لـ $(g\circ f)(1)$

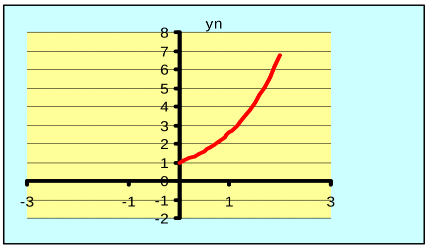
الحل لدينا : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

ونعلم أن : $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و منه نجد : $y_1=f(x_0)+hf(x_0)$

أي : $y_1=y_0(h+1)$ و $y_2=y_1(h+1)$ ومنه $y_n=y_{n-1}(h+1)$

إذن : الفواصل متتالية النقط $M_n(x_n;y_n)$ تشكل حدود متتالية حسابية أساسها $r=h$

و تراتيبها تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $q=h+1$



h=	0,1									
xn	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
yn	1,00	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,95	2,14	2,36	2,59
xn	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
yn	2,85	3,14	3,45	3,8	4,18	4,59	5,05	5,56	6,12	6,73	

القيمة التقريبية لـ : $f(1)$ $f(1)\approx 2,6$

خواص الدالة f

1. لنعتبرالدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}$ ب: $h(x)=f(x)\times f(-x)$

(1 بين أن الدال h ثابتة على : $\mathbb{R}$ علما ان : $f(x)\times f(-x)=1$

(2 برهن عكسيا انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$

2. نفرض انه توجد دالة ثانية g تحقق $g`=g$ و $g(0)=1$ بما ان f لا تنعدم على $\mathbb{R}$

نعتبر الدال k المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $k(x)=g(x)/f(x)$

1) بين أن الدال k ثابتة على : $\mathbb{R}$

2) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x)$

3. ليكن y عدد حقيقي ثابت نعتبر الدال l المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $l(x)=f(x+y)/f(x)$

1) بين أن الدال l ثابتة على : $\mathbb{R}$ و انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $l(x)=f(y)$

2) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و انه من اجل كل y من $\mathbb{R}$:
$f(x+y)=f(y)\times f(x)$

3) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و انه من اجل كل y من $\mathbb{R}$:
$f(x-y)=f(x)/f(y)$

ابراز اهمية التقريب التالفي وكذلك معرفة خصائص الدالة الاسية

الجبرية والتحليلية للدالة اللوغاريتمية من خواص الدالة ln الأسية exp.

- تتم الإشارة إلى أن المنحنين الممثلين للدالتين ln و exp متناظرين بالنسبة للمنصف الأول في المعلم المتعامد والمتجانس وتبرير ذلك.

- توظف خواص الدوال اللوغاريتمية والأسية لحل معادلات ومتراجحات.

- يعطى تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إلها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.

4. ليكن n عدد ا صحيحا نسبيا نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $\varphi(x)=f(nx)/[f(x)]^n$

1) عين الدالة المشتقة للدالة φ

2) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(nx)=[f(x)]^n$

الحل

a) لنعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: ب: $h(x)=f(x)\times f(-x)$

1) h ثابتة على $\mathbb{R}$: يعني ان : $h'(x)=0$ ومنه

$h'(x)=f(x)'\times f(-x)+f(x)\times f'(-x)$ ولدينا

$(f(-x))'=(-x)'f'(-x)$ مشتق مركب دالتين

$h'(x)=f(x)'\times f(-x)-f(x)\times f'(-x)=0$

اذن $h'(x)=0$ ومنه h ثابتة على $\mathbb{R}$:

h ثابتة على $\mathbb{R}$: اي $h(0)=f(0)\times f(-0)=1$ ومنه $h(x)=f(x)\times f(-x)=1$

2) البرهان عكسيا انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$

نعلم ان $f(x)\times f(-x)=1$ و منه $f(x)\times f(-x)\succ 0$ يعني ان $f(x)\neq 0$

b) نفرض انه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$ بما ان f لا تنعدم على $\mathbb{R}$

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $k(x)=g(x)/f(x)$

1) الدالة k ثابتة على : $\mathbb{R}$ يعني ان $k'(x)=0$

$k(0)=g(0)/f(0)=1$ ومنه $k(x)=g(x)/f(x)=1$ ومنه k ثابتة على $\mathbb{R}$

$k'(x)=g(x)[f(x)-f'(x)]/[f(x)]^2$ بوضع $f'(x)=f(x)$

الشرط الواجب تحقيقه لان $f(x)\neq 0$ ومنه k ثابتة على $\mathbb{R}$

2) استنتاج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x)$

بما ان k ثابتة على : $\mathbb{R}$ حتى يتحقق $g(x)=f(x)$ يجب ان يكون $k(x)=1$

ومنه $g(x)=f(x)$

c) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

1) بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=f(y)$.

$i'(x)=[f'(x+y)f(x)-f'(x)f(x+y)]/[f(x)]^2$

ومنه $i'(0)=[f'(y)-f(y)]/[f(0)]^2=0$ و $i(0)=\dfrac{f(y)}{f(0)}=f(y)$

ومنه $i(x)=f(y)$

2) اثبات ان $f(x+y)=f(x)f(y)$

لدينا $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ و $i(x)=f(y)$ ومنه $f(x+y)=f(x)f(y)$

اثبات ان $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

لدينا $f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)f(-y)$ بما ان

ومنه $f(y)\times f(-y)=1...donc...f(-y)=1/f(y)$ $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

2-) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $h(x)=f(x)f(-x)$

اثبات أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h'(x)=f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)$

$h'(x)=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)$

$h'(x)=0$ والدالة h ثابتة على R

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)f(-x)=1$ (3)

h دالة ثابتة علي R ومنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $h(x)=f(x)f(-x)=a$ ولدينا

$h(0)=f(0)f(-0)=1$ ومنه a =1

أي ان $f(x)f(-x)=1$

برهان بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)\neq 0$ (4)

نفرض انه يوجد عدد حقيقي x يحقق f(x) = 0 ومنه $0.f(-x)=1$

أي أن $0=1$ وهذا تناقض ينتج أن $f(x)\neq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

ومنه ينتج $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$. بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$ ،

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

لنبين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $k'(x)=\dfrac{g'(x).f(x)-g(x).f'(x)}{(f(x))^2}$

$k'(x)=\dfrac{g(x).f(x)-g(x).f(x)}{(f(x))^2}=0$

والدالة k ثابتة علي R

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x)=f(x)$.

الدالة k ثابتة علي R ومنه يوجد عدد حقيقي حيث k(x) = a أي $\dfrac{g(x)}{f(x)}=a$

لكن $\dfrac{g(0)}{f(0)}=1$ ومنه a = 1 ينتج ان f(x) =g(x) أي ان الدالة fوحيدة

4-) ليكن y عدد حقيقي كيف ثابت.نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

لنبين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $i(x)=f(y)$.

لدينا: $i'(x)=\dfrac{f'(x+y)f(x)-f'(x)f(x+y)}{f^2(x)}$

$i'(x)=\dfrac{f(x)(f'(x+y)-f(x+y))}{f^2(x)}$ لان $i'(x)=\dfrac{f(x)(f(x+y)-f(x+y))}{f^2(x)}$

$i'(x)=0$ والدالة i ثابتة على R

ومنه يوجد عدد حقيقي a حيث $i(x)=a$

ولدينا : $\dfrac{f(0+y)}{f(0)}=a$ أي أن $i(0)=$ $f(y)=a$ أي أن $i(x)=f(y)$

ومنه $\dfrac{f(x+y)}{f(x)}=f(y)$ ينتج أن : $f(x+y)=f(x)f(y)$

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x-y)=f(x)/f(y)$

لدينا : $f(x-y)=f(x+(-y))$ ومنه $f(x-y)=f(x)f(-y)$

ينتج أن : $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ لأن $f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}$

5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $j(x)=\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

عين الدالة المشتقة للدالة j.

استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$

لدينا : $j'(x)=\dfrac{nf'(nx)[f(x)]^n-n[f(x)]^{n-1}f'(x)f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$

$$j'(x)=\dfrac{nf'(nx)[f(x)]^n-n[f(x)]^{n-1}f(x)f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$$

لأن $f=f'$ $j'(x)=\dfrac{n[f(x)]^n(f'(nx)-f(nx))}{[f(x)]^{2n}}$ اي $j'(x)=\dfrac{n(f'(nx)-f(nx))}{[f(x)]^n}$

ومن $f(nx)=f'(nx)$ نجد ان $j'(x)=0$

والدالة ثابتة j علي R أي انه يوجد عدد حقيقي a حيث $j(x)=a$

ومنه $j(0)=\dfrac{f(0)}{f(o)^n}=a$ ومنه a = 1 أي $j(x)=1$ أي ان $\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}=1$

ينتج ان : $f(nx)=[f(x)]^n$ (7)

تسمي الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق عليR حيث f(0)=1 ، f '=f

الدالة الاسية النيبيرية ونرمز لها بالرمز EXP

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و$f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية).

و نرمز إليها بالرمز " exp ".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$. $f(x)=\exp(x)$

المؤسسة:	المستوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: تحليل
التاريخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الأسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الدالة الأ تعريف وخواص $x \mapsto \exp(x)$

المكتسبات المستهدفة: توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01: 1- للدالة f تحقق $f=f'$ جد f''' و f^{4} 2- نرمز لـ f بـ exp ونعتبر $f(0)=1$ ونعرف g كما يلي $g(x)=\exp(x)\exp(-x)$ جد g' واستنتج ان $g(x)=1$ هل يمكن ان تنعدم exp ؟ 3- بين $\exp(x)\succ 0$ اعتمدا $\exp(0)$ والبرهان بالخلف والقيم المتوسطة	**4/ الدالة الأسية** **2.4 مبرهنة وتعاريف** **مبرهنة:** توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق الشروط التالية : $f'=f$ و $f(0)=1$ نرمز الى هذه الدالة بالرمز exp و نسميها الدالة الاسية النيبيرية .... وهذا يعني ان المعادلة التفاضلية $f'=f$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ يحقق $f(0)=1$ **ملاحظة** الدالة الاسية هي حل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$ **خاصية :** الدالة الاسية لا تنعدم في $\mathbb{R}$ أي من اجل كل x حقيقي $\exp(x)\neq 0$ **3.4 خواص الدالة الأسية** **خاصية :** الدالة الاسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالها المشتقة $\exp(x)=\exp'(x)$ **خاصية :** الدالة الاسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\exp(0)=1$ **خاصية :** الدالة الاسية موجبة تماما $\mathbb{R}$ أي من اجل كل x حقيقي $\exp(x)\succ 0$ **البرهان:** نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0,c]$ من اجل كل x حقيقي * $\exp(x)\neq 0$ $\exp(0)=1\succ 0$ الدالة exp مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بفرض وجود عدد حقيقي c حيث $\exp(0).\exp(c)\prec 0$ يعني $\exp(x)=0$ تناقض **خواص جبرية :** من اجل كل عددين حقيقيين $x;y$ ومن اجل كل عدد صحيح نسبي n: : من اجل كل عددين حقيقيين $x;y$ ومن اجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا : * $\exp(x)\neq 0$ * $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ * $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$ * $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ * $\exp(nx)=[\exp(x)]^{n}$	- تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$. - نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستخدام مجدول (بتطبيق طريقة أولر) ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل. - نقدم هذه الدالة في مرحلة مبكرة من السنة الدراسية قصد توظيفها في العلوم الفيزيائية. - نستنتج من التعريف خواص الدالة الأسية. $\exp(x)>0$، $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. الترميز e^{x}، النهايات والمنحنى الممثل لها. - نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^{x}=a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز $\ln a$، يمكن القول حينئذ أن الدالة $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية. لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية. - تستنتج الخواص

4.4 العدد e و الترميز e^x:

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الاسية أي : $\exp(1)=e$ بالحاسبة نجد : $e\approx 2.718281828$ من الخواص نجد $\exp(n)=e^n$

اصطلاحا نرمز ، من اجل كل عدد حقيقي x الى $\exp(x)$ ب e^x

- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$ و تقرأ e^x: "أسية x".

خاصية: العدد e هو عدد غير ناطق

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب:

من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$
- $\exp'(x)=e^x$
- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أن الدالة f فردية.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

الحل: 1.من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

إذن الدالة f دالة فردية.

.2

$$\frac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}=2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\Bigg/1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

$$=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{\left(e^x+1\right)^2+\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{\left(e^x+1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)}$$

و منه $$\frac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}=\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)}=\frac{\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)}=f(2x)$$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

الجبرية والتحليلية للدالة اللوغاريتمية من خواص الدالة ln الأسية exp.

- تتم الإشارة إلى أن المنحنيين الممثلين للدالتين ln و exp متناظرين بالنسبة للمنصف الأول في المعلم المتعامد والمتجانس وتبرير ذلك.
- توظف خواص الدوال اللوغاريتمية والأسية لحل معادلات ومتراجحات.
- يعطى تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إليها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.

يجب التركيز على اهمية هذه الخواص في دراسة الدالة الاسية

تطبيق $f\,,g\,,h$ ثلاث دوال معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=\exp(x)+2x$ و $g(x)=\exp(x-1)$ و $h(x)=\exp(-2x)$

1) عين اتجاه تغير كل دالة

2) اوجد علاقة بين g',g و ايضا بين h',h

الحل:1) الدالة f هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $x\mapsto 2x..x\mapsto \exp(x)$

$\exp(x)\succ 0$ و 2 معامل توجيه موجب ومنه الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$

الدالة g هي جداء الدالة $\exp(x)\succ 0$ متزايدة بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)\succ 0$

ومنه $g'(x)=\exp'(x)\times\exp(-1)\succ 0$ الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$

$h(x)=\exp(-2x)$ ومنه $h(x)=\left[\exp(-x)\right]^2$ ومنه $h(x)=\left[\left(e^{-x}\right)\right]^2$

اذن $h'(x)=-2e^{x}\left[\left(e^{-x}\right)\right]^3=-2\left[\left(e^{-x}\right)\right]^2$ اذن متناقصة لان $h'(x)\prec 0$

2) علاقة بين g',g وايضا بين h',h

$g(x)=\exp(x-1)=\exp(x)\exp(-1)$ و

$g'(x)=\exp'(x)\exp(-1)=\exp(x)\exp(-1)$ ومنه $g'=g$

$h(x)=1/\exp(2x)$ ومنه $h'(x)=-2\exp(2x)/\exp(2x)^2=-2/\exp(2x)$

اذن $h'=-2h$

تطبيق 1) بين ان : $A=\left(e^{x}\right)^3=e^{3x}$ و $B=e^{(3-2x)}\times e^{(5x-7)}=e^{(-4+3x)}$ و

$C=e^{(3x-1)}/e^{(-3x)}=e^{(6x-1)}$

2) تحقق انه : $e^{(x)}/\left(e^{(x)}-x\right)=1/\left(1-xe^{-x}\right)$ و

$\left(e^{(x)}-e^{(-x)}\right)/\left(e^{(x)}+e^{(-x)}\right)=1-e^{-2x}/\left(1+e^{-2x}\right)$

تطبيقات

تطبيق 1 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

1. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x)=(e^{x}+e^{-x})^2-(e^{x}-e^{-x})^2$
أثبت أنّ f دالة ثابتة
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،
$e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^{x}-1}{e^{2x}}$
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}+e^{-x}-2\geqslant 0$

تطبيق 2 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{e^{2x}+2}{1-e^{2x}}$

1. عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أثبت أنّه من أجل كل $x\in D_f$، لدينا: $f(x)=\frac{2e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$
3. أحسب، من أجل كل $x\in D_f$: $f(-x)+f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا

خاصية

1) معادلة من الشكل : $e^{x}=a$ تقبل حل وحيد هو

من أجل كل عدد حقيقي موجب a $x=\ln a$ حيث "ln" يرمز إلى الدالة اللوغاريثمية النيبرية

مع $\ln e=1$ و $\ln 1=0$

2) مجموعة حلول المعادلة $e^{x}=e^{y}$ هي نفس مجموعة حلول المعادلة $x=y$

3) مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}\leq e^{y}$ هي نفس مجموعة حلول المتراجحة $x\leq y$

المؤسســــــــة:	المستــــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم:	تحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية:	الدالة الأسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :	الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

المكتسبات المستهدفة: تعريف وخصائص

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01:		

نـــشاط

**نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

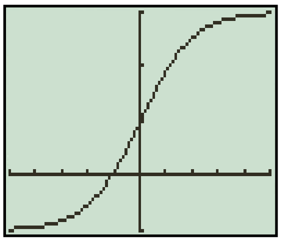
1.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.

2.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$.

الحل: ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

.1 $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{2(e^x+1)}{e^x+1}$ ومنه

$f(-x)+f(x)=2$



المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0;1)$.

.2 $\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=f(x)$.

4/الدالة الأسية

1.5.4. حلول المعادلة

مبرهنة

ليكن k عددا حقيقيا.

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ و $f(0)=1$.

f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{kx}$.. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

*التأكد أن الدالة f تحقق $f'=kf$ و $f(0)=1$.

الوحدانية:

نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g'=kg$ و $g(0)=1$.

- نبرهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$. أي: $f=g$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ نبين ان الدالة h ثابتة ثم نستنتج انه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$g(x)=f(x)$. أي: $f=g$

اهمية هذه المعادلة في دروس الفيزياء

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ هي الدوال: $x\mapsto Ce^{kx}$ حيث Cعدد حقيقي ثابت.

1. أنجز برهانا لهذه المبرهنة.
2. عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)-2f(x)=0$.
3. من بين الدوال f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$.

الحل:

1. إذا كانت f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=Ce^{kx}$ فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=C\times ke^{kx}=k\left(Ce^{kx}\right)=kf(x)$ و منه $f'=kf$.

عكسيا إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$g'(x)=\dfrac{f'(x)e^{kx}-kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}}=0$ و منه الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$. بوضع $g(x)=C$

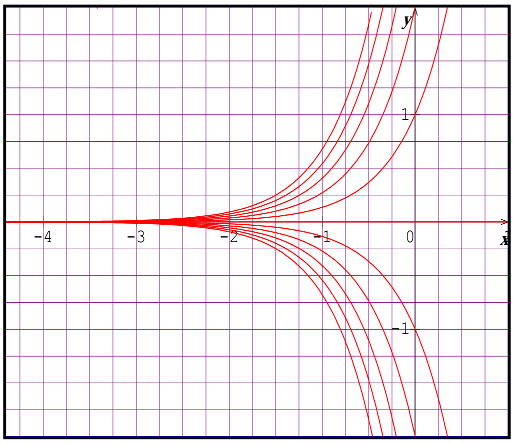
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $f(x)=g(x)e^{kx}$ يكون لدينا:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=Ce^{kx}$.

2. $f'(x)-2f(x)=0$ تعني $f'(x)=2f(x)$ و منه $f'=kf$ مع $k=2$.

الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$ حيث Cعدد حقيقي ثابت.

التمثيلات المقابلة هي لدوال f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$



3. نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ و بما أن

$f\left(\frac{1}{2}\right)=Ce^{2\left(\frac{1}{2}\right)}=C\times e$ يكون لدينا $C\times e=e^2$ أي $C=e$. و منه

$f(x)=e\times e^{2x}=e^{2x+1}$. إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة: $x\mapsto e^{2x+1}$

تمرين 12 ص 102

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$f'=kf$ و $f(0)=\lambda$

مع k و λ عددان حقيقيان و $\lambda \neq 0$

لتكن لدالة g المعرفة بـ: $g=\frac{1}{\lambda}f$

1. تحقق أن $g'=kg$ و $g(0)=1$

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\lambda\exp(kx)$

الحل: 1-لدينا $g=\frac{1}{\lambda}f$ ومنه $g'=\frac{1}{\lambda}f'$ ومنه $g'=\frac{1}{\lambda}kf \ ...(f'=kf)$

ومنه $g=\frac{1}{\lambda}f$ يعني $g'=kg$

ولدينا $g(0)=\frac{1}{\lambda}f(0)$ وبما ان $f(0)=\lambda$ فان $g(0)=\frac{1}{\lambda}\lambda=1$

2- من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\lambda\exp(kx)$ أي $f(x)=\lambda e^{kx}$

لاحظ ان $f'=kf$ و $f(0)=1$ حل هذه المعادلة هو $f(x)=e^{kx}$

أي من الشكل $f'/f=k$ دالتها الاصلية هي $\ln f=kx+c$ أي $f(x)=e^{kx}$

لدينا أن $g'=kg$ و $g(0)=1$ ومنه $g(x)=e^{kx}$ وبما ان $g=\frac{1}{\lambda}f$

فان $\frac{1}{\lambda}f(x)=e^{kx}$ اذن $f(x)=\lambda e^{kx}$

تمرين 13 ص 102

في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة

f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

1. $f'=-6f$ و $f(0)=-1$ الحل $f(x)=f(0)e^{-6x}$ أي $f(x)=-e^{-6x}$

2. $f'=-2f$ و $f(0)=\frac{1}{2}$ الحل $f(x)=f(0)e^{-2x}$ أي $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}$

3. $f'=\sqrt{2}f$ و $f(0)=2$ الحل $f(x)=f(0)e^{\sqrt{2}x}$ أي $f(x)=2e^{\sqrt{2}x}$

2.5.4. دوال تحول المجموع الى جداء

مبرهنة

الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$

هي الدوال $x\mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

مثال

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f'=kf$ و $f(0)=\lambda$

مع k و λ عددان حقيقيان و $\lambda\neq 0$

لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g=\frac{1}{\lambda}f$

1) تحقق أن $g'=kg$ و $g(0)=1$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\lambda\exp(kx)$

المؤسســـــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الأسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة الاسية

المكتسبات المستهدفة: دراسة تغيرات الدالة الأسية

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

نريد تعيين $\lim_{x\to+\infty} e^x$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x$.

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-x$.

1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
2. احسب $f(0)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^x\ge x+1$.
3. عيّن نهاية الدالة $\exp$ عند $+\infty$ ثمّ استنتج نهايتها عند $-\infty$.

نشاط

6.4 دراسة الدالة الأسية

1.6.4 اتجاه التغير

خاصية: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x=e^{2\times\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x\neq0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x>0$.

خاصية: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)=e^x$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)>0$

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

2.6.4 النهايات

خاصية: (1) $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. (2) $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

البرهان:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-1$.

و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^x\ge1$ فإن $f'(x)\ge0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.

إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\ge0$ أي $e^x\ge x$. لدينا $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و منه $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=\frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ $\left(\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty\right)$ فإن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

3.6.4 جدول التغيرات

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
e^x	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$

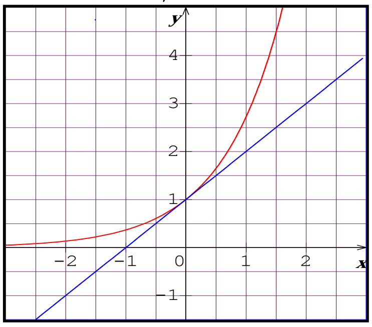
التعليمات والتوجيهات:

الترميز e^x، النهايات والمنحنى الممثل لها.

- نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x=a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز $\ln a$، يمكن القول حينئذ أن الدالة $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية. لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية.

4.6.4 التمثيل البياني

- المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta):y=x+1$.



- من تعريف العدد المشتق لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$

نتيجة: الدالة $x\mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $\boxed{e^x\approx 1+x}$.

نتائج :

لدينا الدالة $x\mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عددان حقيقيان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ لدينا

$\boldsymbol{a=b}$ تكافؤ : $\boldsymbol{e^a=e^b}$ ؛ $\boldsymbol{a>b}$ تكافؤ : $\boldsymbol{e^a>e^b}$

$\boldsymbol{a<b}$ تكافؤ : $\boldsymbol{e^a<e^b}$ ؛ $\boldsymbol{x>0}$ تكافؤ : $\boldsymbol{e^x>1}$

$\boldsymbol{x<0}$ تكافؤ : $\boldsymbol{e^x<1}$

5.6.4 تطبيقات معادلات و متراجحات

تطبيق: ادرس إشارة العبارة $\left(e^x-1\right)$ وهذا حسب قيّم العدد الحقيقي x.

حل التطبيق : نحل المعادلة $e^x-1=0$ معناه $e^x=1$ ومعناه $e^x=e^0$ أي $x=0$.

$e^x-1>0$ معناه $e^x>1$ ومعناه $e^x>e^0$ أي $x>0$. وعليه $e^x-1<0$ معناه $x<0$

تطبيق حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x}+3=0$ (1) $e^{-2x+1}-1=0$ (2) $e^{-2x-1}-e^x<0$ (3) $e^{2x}>2-e^x$ (4)

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحل:

1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$. إذا $S=\phi$.

2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^0$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0{,}5$ إذن $S=\{0{,}5\}$.

3) تعني $e^{-2x-1}<e^x$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

4) تعني $e^{2x}+e^x-2\leq 0$. بوضع $e^x=X$ نحصل على $X^2+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود X^2+X-2 هما -2 و 1 و منه $X^2+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^x<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^x>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$
- حيث ($\lambda>0$)
$x\mapsto a^x$ حيث ($a>0$) أو
$x\mapsto x^a$ حيث: ($x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$)
بالنسبة لأي شعبة؟
- نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

مهمة في دراسة اتجاه التغير

تمرين 6 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين: 1) $e^{-x^2}=\frac{1}{e}$ 2) $e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}}$

حل للتمرين: 1) $e^{-x^2}=\frac{1}{e}$ معناه $e^{x^2}=e$ ومعناه $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

2) $e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}}$ معناه $x+3=\frac{4}{x}$ و $x\neq 0$ ومعناه $x^2+3x-4=0$ و $x\neq 0$

يكافئ $(x-1)(x+4)=0$ و $x\neq 0$ أي $x=1$ أو $x=-4$

تمرين 7 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ 2) $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$ 3) $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$.

حل للتمرين

1) $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ معناه $x^2=-3x-3$ ومعناه $x^2+3x+3=0$

$\Delta=9-12=-4$ وعليه المعادلة لا تقبل حلول.

2) $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$ معناه $\frac{x+4}{6-x}=\frac{1}{x}$ و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ ومعناه $x^2+4x=6-x$

و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ يكافئ $x^2+5x-6=0$ و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ ويكافئ

$(x-1)(x+6)=0$ و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ أي $x=-6$ أو $x=1$

3) $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$ معناه $e^{2x+1}=e^{3x}$ ومعناه $2x+1=3x$ أي $x=1$

تمرين 9 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ 2) $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ 3) $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4e^{-x}$ 4) $e^{x-x^2}\geq 1$

حل للتمرين

1) $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ معناه $2x^2\leq 5x+3$ ومعناه $2x^2-5x-3\leq 0$

$\Delta=49$ ومنه $x'=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$ و $x''=\frac{5+7}{4}=3$ وعليه $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ معناه $x\in[-0.5;3]$

2) $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ معناه $x+1>-\frac{2}{x}$ و $x\neq 0$ ومعناه $x+1+\frac{2}{x}>0$ و $x\neq 0$ يكافئ

$\frac{x^2+x+2}{x}>0$ و $x\neq 0$

لدينا $\Delta=-7$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2+x+2>0$ وعليه $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ معناه $x>0$.

3) $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4e^{-x}$ معناه $e^{x^2}>e^{-x+12}$ ومعناه $x^2>-x+12$ يكافئ

$x^2+x-12>0$ لدينا $\Delta=49$ ومنه $x'=\frac{-1-7}{2}=-4$ و $x''=\frac{-1+7}{2}=3$

وعليه $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4e^{-x}$ معناه $x\in]-\infty;-4[\cup]3;+\infty[$.

4) $e^{x-x^2}\geq 1$ معناه $-x^2+x\geq 0$ ومعناه $-x(x-1)\geq 0$ أي $x\in[0;1]$

تمرين 10 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة والمتراجحة التاليتين:

$(e^x-1)(e^x-e^2)=0$ (1 $\quad$ $(e^x-1)(e^x-e^2)>0$ (2

حل للتمرين

(1 $(e^x-1)(e^x-e^2)=0$ معناه $(e^x-1=0)$ أو $(e^x-e^2=0)$ ومعناه $(e^x=1)$ أو $(e^x=e^2)$ أي $x=0$ أو $x=2$

(2 $(e^x-1)(e^x-e^2)>0$ معناه $[(e^x-1>0)$ و $(e^x-e^2>0)]$ أو $[(e^x-1<0)$ و $(e^x-e^2<0)]$ ومعناه $(x>0$ و $x>2)$ أو $(x<0$ و $x<2)$ يكافئ $x>2$ أو $x<0$ أي $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

x	$-\infty$	2	0	$+\infty$
(e^x-1)	-	-	+	+
(e^x-e^2)	-	+	+	+
الاشارة	+	-	+	+

نشاط استثماري الهدف من هذا النشاط : معرفة بعض النهايات الشهيرة للدالة الأسية و الخواص المتعلقة بها.

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة: $f(x)=e^x-x$ على $\mathbb{R}$

أثبت أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0;\ \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

الدالة f عبارة عن فرق دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي كذالك قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x)=e^x-1$ وبما أن الدال $x\mapsto e^x$ متزايدة تماما

لأن دالتها المشتقة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ فان:

$f'(x)>0$ يكافئ $e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0$ يعني أن:

$x>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$

العدد 1 قيمة حدية صغرى للدال f

ومنه $f(x)\geq1$ وذالك من أجل كل عدد حقيقي x و منه يأتي: $e^x\geq x$ و بما أن

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ يأتي على التو $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ حسب مبرهنة الحد الأدنى.و منه

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$.

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x\geq x$

ومنه $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq\left(\frac{x}{2}\right)^2\to e^x\geq\frac{x^2}{4}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4}=+\infty$

وحسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{-xe^{-x}}=0$

الدال $f:x\mapsto e^x$ مستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي تقبل الاشتقاق عند الصفر.ومنه

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

دراسة الدالة الأسية:

نشاط 3: نريد تعيين $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$.

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=e^{x}-x$.

1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
2. احسب $f(0)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^{x}\geq x+1$.
3. عيّن نهاية الدالة $\exp$ عند $+\infty$ ثمّ استنتج نهايتها عند $-\infty$.

حل النشاط 3:

1. الدالة $\exp$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $\exp'(x)=e^{x}$ ومنه $f'(x)=e^{x}-1$

$f'(x)=0$ معناه $e^{x}-1=0$ ومعناه $e^{x}=1$ يكافئ $e^{x}=e^{0}$ أي $x=0$؛

$f'(x)>0$ معناه $e^{x}-1>0$ ومعناه $e^{x}>1$ يكافئ $e^{x}>e^{0}$ أي $x>0$.

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2. لدينا $f(x)=e^{x}-x$ ومنه $f(0)=e^{0}-0=1$

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f(x)\geq f(0)$ وهذا يعني $e^{x}-x\geq 1$ أي $e^{x}\geq x+1$.

3. لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^{x}\geq x+1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{e^{t}}=0$. الدالة $\exp$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة **exp**:

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$\exp'(x)=e^{x}$	+
$\exp(x)=e^{x}$	$0 \nearrow$ 1 $\nearrow$ e $\nearrow +\infty$

ملاحظة 1: الدالة $\exp$ تقبل الاشتقاق عند 0 إذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{0}}{x-0}=\exp'(0)=e^{0}=1$ أي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

نتائج:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty}\quad\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0}\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1}$$

ملاحظة 2: ليكن h عدد حقيقي قريب من 0. $\exp(0+h)\approx\exp(0)+h\exp'(0)$ أي

$\exp(h)\approx 1+h$

التقريب التآلفي للعبارة e^{x} بجوار الصفر هو $1+x$.

التمثيل البياني للدالة **exp**: ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نسمي $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل للدالة $\exp$.

معادلة (T) مماس المنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0: $y=\exp'(0)(x-0)+\exp(0)$ أي $y=x+1$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ إذن المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$.

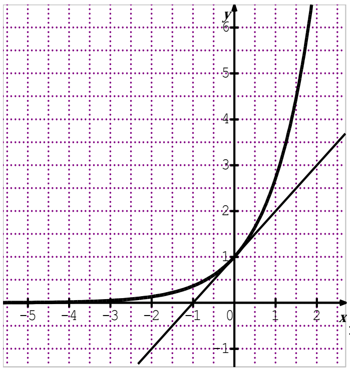
من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^{x} \geq x+1$

إذن المنحني $\mathscr{C}$ يقع فوق المستقيم (T) في المجال $[0;+\infty[$.

تمرين 45 صفحة 104

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.
2. عيّن نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
3. احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.



حل التمرين:

1. تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=\dfrac{e^{4x}\left(1-\dfrac{3}{e^{4x}}\right)}{e^{4x}\left(1+\dfrac{1}{e^{4x}}\right)}=\dfrac{\left(1-\dfrac{3}{e^{4x}}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{e^{4x}}\right)}=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$

2. تعيين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=-3$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}=1$

3. حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها: لدينا $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$ ؛ نضع $u(x)=e^{x}$ و $v(x)=4x$ إذن $u[v(x)]=e^{v(x)}=e^{4x}$ ولدينا

$$[u\circ v]'(x)=u'[v(x)]\times u'(x)=4e^{4x}$$

ومنه $f'(x)=\dfrac{4e^{4x}\left(e^{4x}+1\right)-4e^{4x}\left(e^{4x}-3\right)}{\left(e^{4x}+1\right)^{2}}$ أي

$$f'(x)=\frac{4e^{4x}\left(e^{4x}+1-e^{4x}+3\right)}{\left(e^{4x}+1\right)^{2}}=\frac{16e^{4x}}{\left(e^{4x}+1\right)^{2}}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{4x}>0$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$

5. جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-3 ↗	1

المؤسســـة:	المستـــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـدان التعلم: تحليل
التاريــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الاسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة $\exp\circ u$

المكتسبات المستهدفة: حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ ، $y''=f(x)$ حيث f دالة مألوفة.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01:		- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$ - حيث $(\lambda>0)$ $x\mapsto a^x$ (حيث $a>0$) أو $x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟ - نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

7.4 دراسة الدالة $\exp\circ u$

1.7.4 النهايات

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{-x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2.7.4 اتجاه التغير

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان: نعلم أن الدالة " exp " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

$[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

3.7.4 المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان: إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " exp " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا: من أجل كل x من I،

$$(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.

مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^3+3x+1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f.
2. أثبت أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1,0]$.

الحل:

1. نلاحظ ان $u(x)=x^3+3x+1$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x)=3x^2+3$ لاتنعدم وهي موجبة يعني ان u متزايدة على $\mathbb{R}$ ومنه f متزايدة على $\mathbb{R}$
2. * الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

* الرتابة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3(x^2+1)e^{x^3+3x+1}$

و بما أن $3(x^2+1)>0$ و $e^{x^3+3x+1}>0$ فإن $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

لدينا $f(-1)=e^{-3}\approx 0,5$ و $f(0)=e\approx 2,71$. نلاحظ أن $f(-1)<2<f(0)$. إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين -1 و0. تعطينا الحاسبة $-0,11<\alpha<-0,10$.

الدالة المشتقة للدالة $\varphi : x\mapsto e^{g(x)}$

إذا كانت الدالة φ معرفة على مجال I وقابلة للإشتقاق على I فان الدالة $\varphi : x\mapsto e^{g(x)}$ تقبل الاشتقاق على هذا المجال ودالتها المشتقة هي الدالة $\varphi : x\mapsto g'(x)\times e^{g(x)}$

مثال:

-1 الدالة $\varphi : x\mapsto e^{x^2-3x}$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ عندئذ دالتها المشتقة هي الدالة $\varphi : x\mapsto (3x^1-3)e^{x^2-3x}$

-2 عين الثوابت الحقيقية $\alpha;\beta$ حتى تكون الدالة $\varphi : x\mapsto (\alpha x^2+4x+\beta)e^{x^3+2x^2-9x+3}$ أصلية للدالة $\eta : x\mapsto 5e^{x^3+2x^2-9x+3}$

تطبيق:

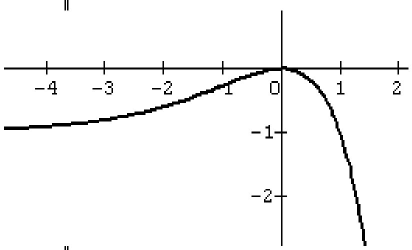
حل في $\mathbb{R}$ مايلي: $(x^2-4x+3)e^x=0$; (3) $e^{2x}-3e^x+2=0$; (2) $e^{x^2-1}=e$ (1)

$e^{2x-1}\le 2008;\quad xe^{2x}-x^2e^x>0$

أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^x}{-x+e^{-x}};\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\dfrac{e^x}{x}$

نعتبر الدالة $f : x\mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ احسب الدالة المشتقة للدالة f. استنتج إشارتها ثم حدد اتجاه تغيراتها.

أنشئ التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.



لأن $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}\le 0$

مشتقة الدالة $x\mapsto (1-x)e^x-1$ هي $g'(x)=-xe^x$

يعني $g(x)=(1-x)e^x-1$ ومنه $(1-x)e^x-1\le 0$

من هنا الدالة $f: x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ متناقصة تماما

نشاط: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x} + 3 = 0 \quad (1) \qquad e^{-2x+1} - 1 = 0 \quad (2)$

$e^{-2x-1} - e^x < 0 \quad (3) \qquad e^{2x} > 2 - e^x \quad (4)$

طريقة: المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$ تعني $u(x) \geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x} = -3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x} > 0$. إذن $S = \phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1} = 1$ أي $e^{-2x+1} = e^0$ أي $-2x + 1 = 0$ و منه $x = 0,5$ إذن $S = \{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1} < e^x$ أي $-2x - 1 < x$ أي $x > -\dfrac{1}{3}$ و منه $S = \left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$. بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + X - 2 \leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^2 + X - 2$ هما -2 و 1 و منه $X^2 + X - 2 \leq 0$ تعني $X < -2$ أو $X > 1$

$X < -2$ تعني $e^x < -2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X > 1$ تعني $e^x > 1$ أي $x > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S =]0; +\infty[$.

نشاط: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C).

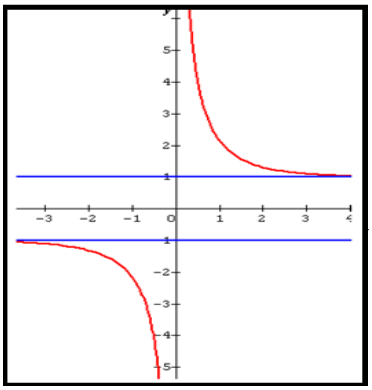
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحنى (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل:

- لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و منه $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x\left(1 + e^{-x}\right)}{e^x\left(1 - e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ فإن

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.



- لدينا $\lim\limits_{x \to 0}\left(e^x + 1\right) = 2$ و $\lim\limits_{x \to 0}\left(e^x - 1\right) = 0$.

نعلم أن $e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$

و بالتالي $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x = 0$، $y = -1$ و $y = 1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty; 0[$، $]0; +\infty[$

و لدينا $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ ، $]0; +\infty[$.

مثال

لتكن الدالة g حيث $g(x)=x^2-1$ أدرس اتجاه التغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

استنتج اتجاه التغيرات الدالة f حيث $f(x)=e^{x^2-1}$ $\left(f=\exp\circ g\right)$

الحل

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

بما أن الدالة f مركبة من الدالة g و $\exp$ على الترتيب و نعلم أن الدالة $\exp$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ نجد :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

المؤسســـــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الاسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة $\exp(-\lambda x),\exp(-\lambda x^2)$

المكتسبات المستهدفة: دراسة دوال اسية مركبة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01:	(see below)	- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$ - حيث $(\lambda>0)$ - $x\mapsto a^x$ حيث $(a>0)$ أو $x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$)، بالنسبة لأي شعبة؟ - نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

8.4 دراسة الدالة $\exp(-\lambda x)$

1.8.4 تطبيقات $\lambda\succ 0$

تطبيق :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$$

نرمز بـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

الحل :

1-نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x)=$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x)=+\infty$;$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=$ مركب دالتين

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)=$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x)=-\infty$;$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ مركب دالتين

2- اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

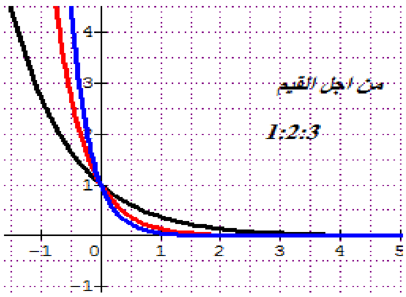
المشتقة: الدالة تقبل الاشتقاق حيث: $f_\lambda'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}$

الاشارة: $f_\lambda'(x)=0$ يعني ان $-\lambda e^{-\lambda x}=0$ ومنه $e^{-\lambda x}\neq 0$

نعلم ان $e^{-\lambda x}\succ 0$ دوما وبما ان $-\lambda\prec 0$ فان $-\lambda e^{-\lambda x}\prec 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↘ 0



3-مهما كانت قيمة $\lambda\succ 0$ فان $-\lambda x=0$ من اجل $x=0$ وهذا كافي لان تكون كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة هي $(0,1)$

4-المنحنيات في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).

8.4 دراسة الدالة $\exp(-\lambda x^2)$

2.8.4 تطبيقات $\lambda \succ 0$

تطبيق :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g_\lambda(x)=e^{-\lambda x^2}$$

نرمز بِ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

الحل :

1-نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2}=0$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x^2)=-\infty$ مركب دالتين

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2}=0$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x^2)=-\infty$ مركب دالتين

2- اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

المشتقة: الدالة تقبل الاشتقاق حيث: $f_\lambda'(x)=-2x\lambda e^{-\lambda x^2}$

الاشارة: $f_\lambda'(x)=0$ يعني ان $-2\lambda x e^{-\lambda x^2}=0$ ومنه $e^{-\lambda x^2}\neq 0$ اي $x=0$

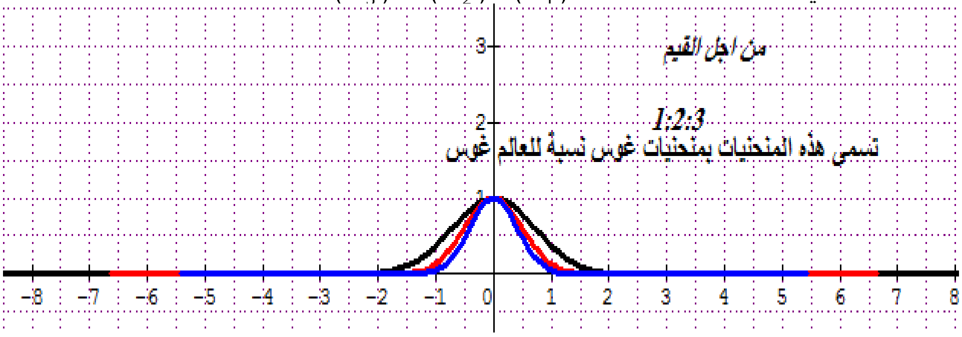
نعلم ان اشارة $e^{-\lambda x^2}$ دوما تتعلق باشارة $-\lambda x$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	-
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

3-مهما كانت قيمة $\lambda \succ 0$ فان $-\lambda x=0$ من اجل $x=0$ وهذا كافي لان تكون كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة هي $(0,1)$

4-المنحنيات في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).



المسألة :

I_/ دالة مساعدة

f دالة عدد ية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) أدرس التغيرات الدالة f

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال] 0.36 ، 0.35 [

3) أدرس اشارة الدالة f

II_/ الدالة المدروسة

لتكن الدالة g لمتغير حقيقي x المعرفة ب : $g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0.\vec{i}.\vec{j})$

1) عين مجموعة التعريف الدالة g

2) بين أن اشارة الدالة المشتقة g' من اشارة الدالة f

4) بين أن $g(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$ ، ثم اعط حصرا لـ : $g(\alpha)$ وستنتج الاشارة

5) ادرس التغيرات الدالة g

6) أ . بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $(+\infty)$

ب . ادرس الوضعية النسبية لـ(C_g) و (Δ)

7) اكتب معادلة المماس (d) لـ(C_g) عند النقطة فاصلتها $x_0=0$

8) انشئ (d) (C_g) ،

9) عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث تكون الدالة : $k(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y'=(x^2+2)e^{-x}$

10) مثل بيانيا الدالة k

الحل:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) دراسة التغيرات الدالة f

النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}=1$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}=-\infty$

لان $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=+\infty$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ 1

المشتقة :

الدالة تقبل الاشتقاق :

$f'(x)=(x^2-2x+2)e^{-x}-e^{-x}(2x-2)$

ومنه $f'(x)=e^{-x}(x^2-4x+4)$

اشارة المشتقة :

$f'(x)\neq 0$ يعني ان $(x^2-4x+4)=0$ ومنه $x=2$ من اشارة (x^2-4x+4) موجبة دوما

2)المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال] 0.36 ، 0.35 [

$f(0.35)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=0.7$ و $f(0.37)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=0.1$

من خلال جدول التغيرات الدالة f متزايدة تماما فهي رتيبة ومستمرة على المجال] 0.36 ، 0.35 [

3) اشارة الدالة f من خلال جدول التغيرات يتضح ان الدالة

$f(x)\leq 0......x\in]-\infty;\alpha]$ و $f(x)\geq 0.......x\in[\alpha;+\infty[$

II/_ الدالة المدروسة

الدالة g لمتغير حقيقي x المعرفة بـ: $g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0.\vec{i}.\vec{j})$

1) مجموعة التعريف الدالة g هي $\mathbb{R}$

2) اشارة الدالة المشتقة g′ من اشارة الدالة f

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=1-(x^2+2)e^{-x}+2xe^{-x}=1-e^{-x}(x^2+2x+2)$

$g'(x)=f(x)$ اشارة g′ من اشارة f

4) اثبات أن $g(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

$g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

، حصرا لـ : $g(\alpha)$ وستنتج الاشارة

نعلم ان $0.35\geq\alpha\geq 0.36$ و $e^{-0.36}\geq e^{-\alpha}\geq e^{-0.35}$ اي $0.698\geq e^{-\alpha}\geq 0.705$ ومنه $2,396\geq 1+2e^{-\alpha}\geq 2.41$

ومنه $0.863\geq\alpha(1+2e^{-\alpha})\geq 0,846$ ومنه $g(\alpha)\succ 0$

5) تغيرات الدالة g

النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\underbrace{-1+(x^2+2)e^{-x}}_{=0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+(x^2+2)e^{-x}=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\underbrace{xe^{x}}_{=0}-\underbrace{e^{x}}_{=0}+\underbrace{(x^2+2)}_{=+\infty}\right)=+\infty$$

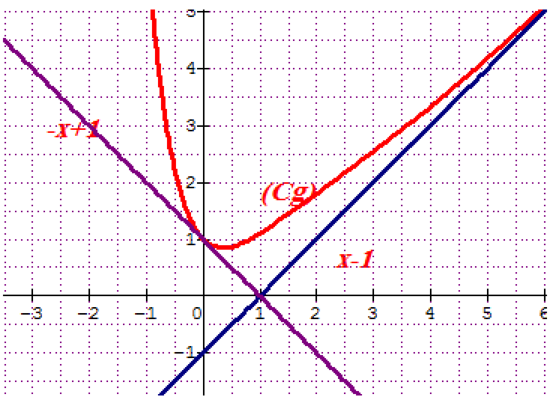
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

6) أ . المستقيم $(\Delta): y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $(+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2e^{-x}}_{=0}+2e^{-x}=0$ المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب . الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

نعلم ان $g(x)-y=(x^2+2)e^{-x}$ ندرس اشارة $(x^2+2)e^{-x}$ لاحظ ان $(x^2+2)\succ 0$ و $e^{-x}\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ)



7) اكتب معادلة المماس (d) لـ (C_g) عند النقطة فاصلتها $x_0=0$

لدينا $g'(0)=1-e^0(2)=-1$ و $g(0)=0-1+(2)e^0=1$

ومنه $y=g'(0)x=g(0)=-x+1$

8) الرسم لـ (d) (C_g) ,

9) الأعداد الحقيقية a,b,c

الدالة : $k(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y'=(x^2+2)e^{-x}...(1)$

يعني ان للمعادلة $y'=(x^2+2)e^{-x}$ حل هو $y=k(x)$

$y'=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}(ax^2+bx+c)$

ومنه

$y'=e^{-x}(-ax^2+x(2a-b)+b-c)......(2)$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد $a=-1;b=-2;c=-4$

ومنه $k(x)=(-x^2-2x-4)e^{-x}$

10) تمثيل بيانيا الدالة k