1. عموميات {المتتاليات}

1. مفهوم متتالية: كلّ دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في $\mathbb{R}$ تسمّى متتالية عددية. لمتغير n .

2. مصطلحات وتعابير: المتتاليات تستعمل بعض المصطلحات العامة:

1. يرمز عادة لمتتالية بالرموز: u، v، w......
2. يرمز لصورة عدد طبيعي n بمتتالية بالشكل $U(n)$ أو U_n ونقرأ: U دليل n .
3. العدد U_n يسمى الحدّ العام للمتتالية وهو الحدّ الذي رتبته n .
4. نرمز لمتتالية كذلك ب U_n أو $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

أمثلة: u هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالشكل: $U_n = \dfrac{1}{n}$

الحدّ الذي رتبته 100 لهذه المتتالية هو: $U_{100} = \dfrac{1}{100}$.

ملاحظة: يمكن أن تكون المتتالية معرفة بدءاً من رتبة معينة.

3. طرق توليد متتالية: يمكن توليد متتالية بالطرق الموالية:

1. بإعطاء قيمة كلّ حدود المتتالية (عدد الحدود منته):

مثال: **1**، **4**، $\dfrac{11}{2}$ ، **7**....

2. بعبارة من الشكل $U_n = f(n)$

تعطى المتتالية على شكل دستور يسمح بحساب كلّ حدّ بدلالة n مباشرة.

مثال: u متتالية معرفة بالعبارة التالية: $U_n = 2n^2 - 3$

في هذه الحالة نجد الحد الأول: $U_0 = -3$ والحد الثاني $U_1 = 2\times 1^2 - 3 = -1$.......الحد العشرون $u_{19} = 2\times 19^2 - 3 = 719$

2. بعلاقة تراجعية:

يمكن تعريف متتالية بإعطاء:

- الحد الأول U_0.
- العلاقة التي تسمح بتعيين كل حدّ انطلاقا من الحد السابق. ونسمي هذه العلاقة "علاقة تراجعية".

مثال: v متتالية معرفة بحدّها الأول $v_0 = 2$ والعلاقة: $v = 3v_n - 2$

لدينا: $v_1 = 3\times v_0 - 2 = 3\times 2 - 2 = 4$.......

4. التمثيل البياني لمتتالية:

التمثيل البياني لمتتالية U هو مجموع النقط ذات الإحداثيات $(n;U_n)$ في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي.

مثال: لتكن U متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $U_n = n^2 + 4$ (لدينا التمثيل التالي).

5. اتجاه تغير متتالية:

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$:

a) إذا كان $U_n \prec U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n، نقول أن المتتالية متزايدة تماماً.

b) إذا كان $U_n \succ U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n، نقول أن المتتالية متناقصة تماماً.

c) إذا كان $U_n = U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n، نقول أن المتتالية ثابتة.

ملاحظة: عندما نستبدل الرمز $\prec$ أو $\succ$ بالرمز $\le$ أو $\ge$ نقول إن المتتالية u متزايدة أو متناقصة.

متتالية رتيبة: نقول عن متتالية أنها رتيبة إذا وفقط إذا كانت متزايدة (تماما) أو متناقصة (تماما).

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (U_n) يمكن أن ندرس إشارة $U_{n+1}-U_n$

أمثلة:

دراسة اتجاه تغير المتتالية U حيث: $U_n=n^2$

لدينا: $U_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$

نجد أن $n^2\prec n^2+2n+1$ معناه $U_n\prec U_{n+1}$ إذا المتتالية متزايدة تماما.

---

2. المتتاليات الحسابية

1.2/ تعريف: نقول عن متتالية (U_n) أنها متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r حيث:

من أجل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=U_n+r$ (نقصد بها المرور من حدّ إلى الحد الموالي له بإضافة نفس العدد الثابت) **كذلك** $U_{n+1}-U_n=r$

نسمي r أساس المتتالية (U_n). مثال: $U_{n+1}=U_n-2$ مع $U_0=2$.

ملاحظة: إذا كان $r=0$ فان الحدود متساوية وعليه المتتالية ثابتة.

2.2/ حساب الحد العام (U_n) : يمكن حساب الحد العام بإحدى الطرق الموالية:

1. بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس r

(U_n) متتالية حسابية ذات الحد الأول U_0 والأساس r معناه:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_n=U_0+nr$ (المتتالية الحسابية للأعداد الفردية: $U_n=1+2n$، $r=2/u_0=1$)

2. بإعطاء حدّ كيفي للمتتالية والأساس:

(U_n) متتالية حسابية علم حدّ منها U_p كيفي والأساس r معناه:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_n=U_p+(n-p)r$

مثال: (U_n) متتالية حسابية حيث $u_{10}=15$ وأساسها $r=\dfrac{3}{2}$

$u_n=u_{10}+(n-10)\times\dfrac{3}{2}$ **ومنه:** $u_{35}=15+(35-10)\times\dfrac{3}{2}=52.5$

3. خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية:

تكون الأعداد $c;b;a$ بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$

يسمى العدد b **بالحساب الوسط** للعددين a و c.

مثال: الأعداد 2، 7، 12 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية لأن: $2+12=2\times 7$.

4. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 والأساس r معناه

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $u_0+u_1+......+u_n=(n+1)\dfrac{(u_0+u_n)}{2}$ **وكذلك من أجل** $u_1+u_2......+u_n=n\dfrac{(u_1+u_n)}{2}$

نحصل على مجموع حدود متتالية متتابعة لمتتالية حسابية بالقاعدة:((الحد الأخير+الحد الأول)/**2**)× عدد الحدود

5.نتيـجة:

متتالية الأعداد الطبيعية غير المنعدمة هي متتالية حسابية، حدّها الأولّ 1 وأساسها 1:

ومجموع حدّا الأول لها هو: $1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

مثال: $1+2+3+...+99=\dfrac{99(99+1)}{2}=4950$

3.2/ التمثيل البياني لمتتالية حسابية:

التمثيل البياني لمتتالية حسابية U هو مجموع النقط المنعزلة الواقعة على نفس الاستقامة ذات الإحداثيات $(n;U_n)$ في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي.

مثال: لتكن U متتالية حسابية التي حدها الأول 1 وأساسها 2: $u_n=1+2n$

2.4/ اتجاه التغير:

(U_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r حيث:

- إذا كان r موجباً تماما فالمتتالية متزايدة تماماً.
- إذا كان r سالباً تماما فالمتتالية متناقصة تماماً.
- إذا كان r منعدماً فالمتتالية ثابتة.

ملاحظة: معامل توجيه المستقيم في كل تمثيل لمتتالية حسابية هو أساس المتتالية الممثلة.

أمثلة:

أدرس تغيرات كل من: $u_n=3+4n$ و $v_n=1-4n$ ثم مثلهما بيانيا في معلم للمستوى $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3. المتتاليات الهندسية

1.3/ تعريف:

نقول عن متتالية (U_n) أنها متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم q حيث:

من أجل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=q\times U_n$ (نقصد بها المرور من حدّ إلى الحدّ الموالي له بالضرب في نفس العدد الثابت q)

نسمي q أساس المتتالية (U_n). مثال: $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}U_n$ مع $q=\dfrac{1}{2}$.

ملاحظة: إذا كان $q=1$ فان الحدود متساوية وعليه فالمتتالية ثابتة.

2.3/ حساب الحد العام (U_n): يمكن حساب الحد العام بإحدى الطرق الموالية:

1.بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس q

(U_n) متتالية هندسية ذات الحد الأول U_0 والأساس q معناه:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_n=q^n\cdot U_0$ (مثال: لتكن متتالية هندسية حيث: $U_0=1$، $q=2$)

2.بإعطاء حدّ كيفي للمتتالية والأساس:

(U_n) متتالية هندسية علم حدّ منها U_p كيفي والأساس q معناه:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_n=U_p\times q^{n-p}$

مثال: (U_n) متتالية هندسية حيث $u_3=\dfrac{15}{7}$ وأساسها $q=\dfrac{3}{2}$

ومنه: $u_n=u_3+q^{n-3}$ $u_5=u_3\cdot q^{5-3}=\left(\dfrac{15}{7}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

3.خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية:

تكون الأعداد $c;b;a$ بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a\times c=b^2$

يسمى العدد b بالوسط الهندسي للعددين a و c.

مثال: الأعداد 25، 5، 1 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية لأن: $1\times 25=5^2$.

4.مجموعة حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

(U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث $q\neq 1$

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $u_0+u_1+\dots\dots+u_n=u_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

كذلك من أجل u_1 لدينا: $u_1+u_2\dots\dots+u_n=u_1\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$

5.نتيـجة:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 لدينا

$$1+x^2+\dots\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

مثال: $1+2^2+2^3+\dots+2^9=\dfrac{1-2^{9+1}}{1-2}=2^{10}-1$

3.3/ اتجاه التغير لمتتالية هندسية:

(U_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q بحيث $q\succ 0\ ;\ u_0\succ 0$ لدينا:

- إذا كان $q\succ 1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.
- إذا كان $0\prec q\prec 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.
- إذا كان $q=1$ فالمتتالية ثابتة.

(U_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q بحيث $q\succ 0\ ;\ u_0\prec 0$ لدينا:

- إذا كان $q\succ 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.
- إذا كان $0\prec q\prec 1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.
- إذا كان $q=1$ فالمتتالية ثابتة.

ملاحظة: إذا كان $q\prec 0$ سالب فان المتتالية الهندسية ليست رتيبة (ليست متزايدة ولا ليست متناقصة)

أمثلة:

أدرس تغيرات كل من: $u_n=2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ و $v_n=\dfrac{3}{2^n}$ المعرفتان على $\mathbb{N}$:

لدينا u_n من الشكل $u_0\cdot q^n$ وهي متتالية هندسية حيث: $u_0=2$ و $q=\dfrac{3}{2}$

بما أن u_0 موجب و $q=\dfrac{3}{2}\succ 1$ فان المتتالية $u_n=2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ متزايدة تماماً

4. تعين متتالية هندسية أو حسابية علما حدّان منها.

تمرين 1:

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_5=4$ و $u_{10}=-11$. عين هذه المتتالية؟

الحل:

نفرض r أساس هذه المتتالية و u_0 حدها الأول

لدينا: $u_{10}=u_5+(10-5)r \Rightarrow -11=4+5r$ ومنه $r=\dfrac{-11-4}{5}=-3 \Rightarrow r=-3$

كذلك: $u_5=u_0+nr \Rightarrow 4=u_0+5(-3)$ ومنه $u_0=4+15=15 \Rightarrow u_0=19$

نستنتج أن (u_n) هي المتتالية التي حدها الأول $u_0=19$ وأساسها $r=-3$

ومنه حدها العام من الشكل $\boxed{u_n=19-3n}$

طريقة:

لتعيين متتالية حسابية (u_n) علما حدان منها u_m و u_p نتبع ما يلي:

- نستعمل الدستور $u_m=u_p+(m-p)r$ لتعيين قيمة الأساس r
- نطبق الدستور $u_m=u_0+mr$ لإيجاد قيمة الحد الأول (u_n)

تمرين 2:

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_3=24$ و $v_5=96$. عين المتتالية v_n

الحل:

نفرض q أساس هذه المتتالية و v_0 حدها الأول

لدينا: $v_5=v_3\times q^{5-3} \Rightarrow 96=24\times q^2$ ومنه $q^2=\dfrac{96}{24}=4$

بمعنى أن: $q=2$ أو $q=-2$.

إذا كان $q=2$ لدينا: $v_3=q^3v_0 \Rightarrow v_0=\dfrac{24}{2^3}=3$ ومنه $v_0=3$

إذا كان $q=-2$ لدينا: $v_3=q^3v_0 \Rightarrow v_0=\dfrac{24}{(-2)^3}=-3$ ومنه $v_0=-3$

نستنتج وجود متتاليتين هندسيتين هما: المتتالية ذات الحد الأول -3 والأساس -2 ومتتالية حدها الأول 3 وأساسها 2.

طريقة:

لتعيين متتالية هندسية (u_n) علما حدان منها u_m و u_p نتبع ما يلي:

- نستعمل الدستور $u_m=u_p\times q^{m-p}$ لتعيين قيمة الأساس q
- نطبق الدستور $u_m=u_0\times q^m$ لإيجاد قيمة الحد الأول (u_n)