المستقيمات في الفضاء:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$

و $\vec{u}(a;b;c)$ **شعاع ناظمي له .**

M(x; y ; z) نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

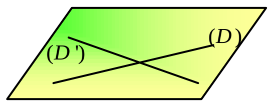
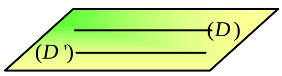
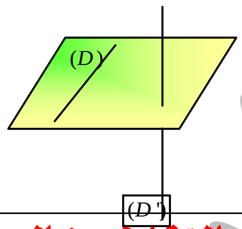
وهذا يعني باستعمال الإحداثيات الديكارتية $\begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt \\ z-z_A=ct \end{cases}$ **مع** $t\in\mathbb{R}$ **أو** $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$ **مع** $t\in\mathbb{R}$

نسمي الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

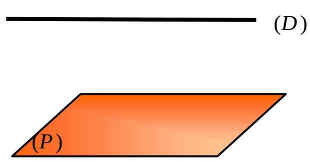
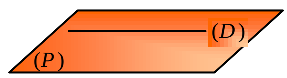
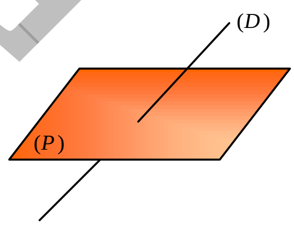
تقاطع المستقيمات و المستويات:

(P) و (P') مستويان ، $\vec{n}$ و $\vec{n}\,'$ ناظميان لهما على الترتيب . (D) و (D') مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u}\,'$ على الترتيب

➢ **تقاطع مستقيمين : يمكن للمستقيمين (D) و (D') أن يكونا**

من نفس المستوي			من مستويين مختلفين
متقاطعين	متوازيين		
	متوازيين و مختلفين	منطبقين	
			
التقاطع نقطة	**التقاطع خال**	**التقاطع مستقيم**	**التقاطع خال**

➢ **تقاطع مستقيم و مستو: نلخص الوضعيات فيما يلي**

(D) يوازي (P)		(D) يقطع (P)
(D) يوازي (P) " تقاطع خال "	(D) محتوا في (P)	
		

تدريب تقويمي(1):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ **.**

ـ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(+2 ; 2 ; - 3) و B(1 ; - 1 ; 0)

ـ هل النقطة C(1 ; 3 ; 2) تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

تدريب تقويمي(2):

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$$d_1:\begin{cases}x=-2+5t\\y=-1-t\\z=3+4t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\quad ،\quad d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=4+3t'\\z=5-t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}\quad ،\quad d_3:\begin{cases}x=-7+7t''\\y=-3t''\\z=2t''\end{cases}\quad t''\in\mathbb{R}$$

– أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

حل مقترح:

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$ ، $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{u_3}\begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix}$ **أشعة توجيه لـ d_1 ، d_2 ، d_3 على الترتيب**

➢ **نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي . و عليه نحل الجملة** $\begin{cases}-2+5t=1-t'\\-1-t=4+3t'\end{cases}$ **نجد** $\begin{cases}t=1\\t'=-2\end{cases}$

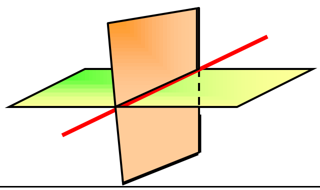
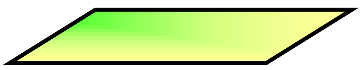
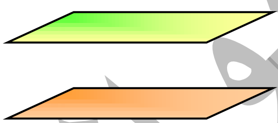
النقطة من d_1 من أجل t = 1 هي (3 ; -2 ;7) و النقطة من d_2 من أجل t' = -2 هي (3 ; -2 ; 7)

و بالتالي فالمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في (3 ; -2 ; 7) .

➢ **$\vec{u_1}$ و $\vec{u_3}$ غير مرتبطين خطيا نستخلص نفس الملاحظة**

لحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=-7+7t''\\-1-t=-3t''\end{cases}$ **نجد** $\begin{cases}t=-1\\t''=0\end{cases}$ **النقطة من d_1 من أجل t = -1 هي (-7 ; 0 ; -1) و النقطة من d_2 من أجل t'' = 0 هي (-7 ; 0 ; 0) إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي .**

تقاطع مستويين : الوضعيات المكنة هي :

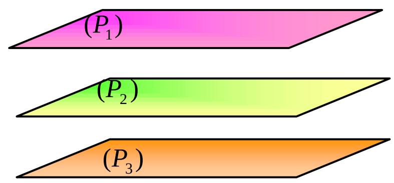
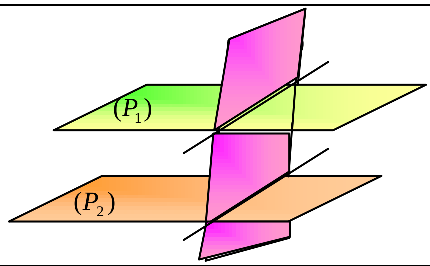
متقاطعان	**متوازيان**	
	منطبقان	**تقاطع خالي**
		
التقاطع مستقيم	**التقاطع مستو**	**التقاطع خال**

خاصية : مستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

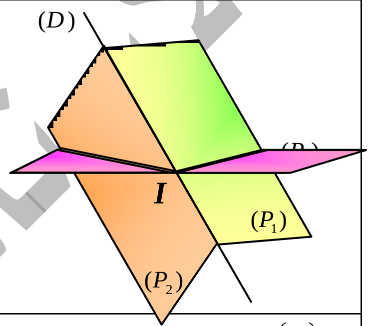
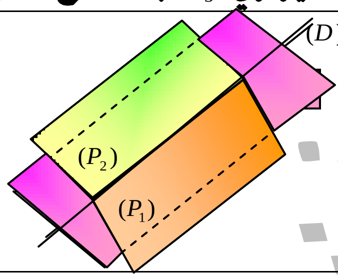
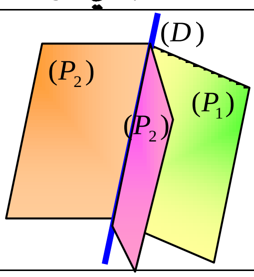
✍ تقاطع ثلاث مستويات :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

➢ **الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) متوازيان**

(P_1) ، (P_3) متوازيان	(P_1) ، (P_3) متقاطعان
	
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

➢ الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

<table>
<tr><th rowspan="2">(D) لا يقطع (P_3)</th><th colspan="2">(D) يوازي (P_3)</th></tr>
<tr><th>(D) يوازي (P_3) بتقاطع خال</th><th>(D) محتوى في (P_3)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{I\}$</td><td>$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$</td><td>$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(D)$</td></tr>
</table>

تدريب تقويمي(3) مع حل مقترح:

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب

$2x-y-2z-1=0$ ، $-x+4y+z-3=0$ ، $4x-2y-4z-5=0$

أدرس الوضعية النسبية لـ

a) (P_1) ، (P_2) **b)** (P_1) ، (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$ **أشعة ناظمية لـ** (P_1) ، (P_2) ، (P_3) **على الترتيب**

a) $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ **غير مرتبطين خطيا ، إذن** (P_1) و (P_2) **ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D) .**

للحصول على تمثيله الوسيطي نكتب مثلا x و y بدلالة z (z وسيط)

$\begin{cases}2x-y-2z-1=0\\-x+4y+z-3=0\end{cases}$ **بعد الحساب نجد** $t\in\mathbb{R};\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$

b) $\vec{n_3}=2\vec{n_1}$ **أي** $\vec{n_1}$ و $\vec{n_3}$ **مرتبطان خطيا ، إذن** (P_1) ، (P_3) **متوازيان . نختار نقطة من** (P_1) **و لتكن** A(0 ; - 1 ; 0) ($0+2-0-5=-3\neq0$) ، A **ليست نقطة من** (P_3) **و بالتالي تقاطع** (P_1) ، (P_3) **خال**

المعادلة الديكارتية لمستو

1.تعريف :

كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على (P)

نتيجة : إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوي (P) . و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P) .

☜ **تمييز مستو :**

$\vec{u}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء .

مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n}.\vec{AM}=0$ هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

حالات خاصة

- معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$
- معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$
- معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ هي $y=0$

تدريب تقويمي(1):

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط A(-2 ; 0 ; 1) ، B(1 ; 0 ; -3) ، C(1 ; - 1 ; 2) .

1. بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .
2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{BC}$ شعاع ناظمي له .

تدريب تقويمي(2):

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء، نعتبر النقط A(1 ; 0 ; 0) ، B(0 ; 1 ; 0) ، C(0 ; 0 ; 1) .

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يشمل النقطة O

بعد نقطة عن مستو

في معلم متعامد و متجانس ، نعتبر المستوي (P) حيث $ax+by+cz+d=0$ ، $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ معادلة ديكارتية له . A نقطة إحداثياتها $(x_A;y_A;z_A)$.

البعد بين A و (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

تدريب تقويمي(3):

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر المستوي (P) الذي معادلة له: $3x-2y+5z-4=0$.

1) عين بعد النقطة A(1 ; -2 ; 7) عن المستوي (P) .

2) عين بعد النقطة B(2 ; 1 ; 0) عن المستوي (P) . ماذا تستنتج ؟

تطبيقات:

تطبيق(1):

نعتبر النقط $A(1,0,-1)$، $B(2,2,3)$،
$C(3,1,-2)$ **و** $D(-4,2,1)$

1. **اثبت أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته.**
2. **أ) بين أن الشعاع** $\vec{n}(2,-3,1)$ **ناظمي للمستوي (ABC)**
   ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
3. **عين بعد النقطة D عن المستوي(ABC)، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه DABC .**

تطبيق(2):

تعطى النقط $A(1,-1,0)$، $B(2,3,-4)$ **و** $C(-3,0,1)$ **والشعاع** $\vec{n}(8,15,17)$.

1. **تحقق أن النقط A،B،C ليست في استقامية.**
2. **أحسب** $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ **و** $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ **استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .**
3. **عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة** $D(-2,2,-1)$

تطبيق(3):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **ونعتبر النقط**
$A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$, $D(4;-2;5)$ **والشعاع** $\vec{n}(2;-1;1)$

1. **بين أن النقط** A ، B ، C **ليست على استقامية**
2. **بين أن** $\vec{n}$ **شعاع ناظمي للمستوي** (ABC) **وعين معادلة ديكارتية للمستوي** (ABC)
3. **ليكن** (Δ) **مستقيم ذو التمثيل الوسيطي** $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$ **مع** $t\epsilon\mathbb{R}$
   - **بين ان** D **تنتمي إلى** (Δ) **وان** (Δ) **عمودي على** (ABC)
4. **لتكن** E **المسقط العمودي لـ** D **على** (ABC)
   - **بين ان** E **هي مركز ثقل المثلث** ABC
5. **أوجد معادلة ديكارتية لسطح الكرة** (S) **التي مركزها** D **وتمس المستوي** (ABC)
   - **أدرس الوضعية النسبية لسطح الكرة** (S) **مع المستقيم** (Δ) **(غير منصوص على الوضعية في المنهاج)**