ثانويّة عبد العزيز الشّريف — دليل مختصر للطرق المتّبعة عند الإجابة عن أسئلة الدّوال — إعداد الأستاذ : م. جبالي

الوادي — لأ قسام السنة الثانية والثالثة ثانوي — السنة الدراسيّة:2011/2010

في كلّ ما يلي : يرمز D_f إلى مجموعة تعريف دالة f ،أمّا C_f فيرمز إلى منحنيها في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ملاحظة: إذا كتبنا ∞ فنقصد $+\infty$ أو $-\infty$.

1)المستقيم المقارب العمودي:

إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty}$ فإنّ تفسيرها البياني(أو الهندسي) هو: المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا عموديّا معادلته $\boxed{x=a}$.

2)المستقيم المقارب الأفقي:

إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b}$ فإنّ تفسيرها البياني(أو الهندسي) هو: C_f يقبل مستقيما مقاربا أفقيّا معادلته $\boxed{y=b}$ ،وذلك بجوار ∞.

3)المستقيم المقارب المائل:

ا-لإثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب مائل لـ C_f بجوار ∞ ، يكفي أنْ نثبت أنّ : $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0}$.

بـ- إذا لم تُعْطَ لنا معادلة المستقيم المقارب المائل، و طُلِب منّا تعيينه، ننظر إلى عبارة $f(x)$، فإنْ كانت من الشكل التالي:

$$f(x)=ax+b+\varphi(x) \quad \text{مع} \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$$

فالمستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ C_f عند ∞.

إذا لم تتوفّر الملاحظة السابقة، نعيّن المستقيم المقارب المائل بالطريقة التالية: نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ، فنجد عددا حقيقيّا a غيرمعدوم، ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$، فنجد عددا حقيقيّا b و تكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y=ax+b$.

4)الدالة الزوجيّة:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أنّ f زوجيّة، نبرهن،من أجل كل x من D_f ، أنّ: $\boxed{f(-x)=f(x)}$

ملاحظة هامّة: إذا كانت f زوجيّة، فيُمْكِن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم نُكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

5)الدالة الفرديّة:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أنّ f فرديّة، نبرهن،من أجل كل x من D_f ، أنّ: $f(-x)=-f(x)$ أو $\boxed{f(-x)+f(x)=0}$.

ملاحظة هامّة: إذا كانت f فرديّة، فيُمْكِن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم نُكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى مبدإ المعلم.

6)الدالة الدوريّة:

f دالة، و p عدد حقيقي غير معدوم، بحيث من أجل كل x من D_f ، $x+p$ ينتمي إلى D_f. لإثبات أنّ p دَوْرٌ للدالة f نبرهن، من أجل كل x من D_f ، أنّ : $\boxed{f(x+p)=f(x)}$.

ملاحظة1 : الدّوْر P للدالة f هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما يحقق العلاقة السابقة .

ملاحظة2 : إذا كانت f دوريّة، فيُمْكِن الاكتفاء بإنشاء جزء من C_f على مجال طوله الدور P.

7)مركز التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α.
لإثبات أنّ النقطة $\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر للمنحني C_f ، يكفي أنْ نثبت، من أجل كل x من D_f ، أنّ :
$\boxed{f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta}$ أو $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$.

8)محور التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α.
لإثبات أنّ المستقيم $(D): x=\alpha$ محور تناظر للمنحني C_f ، يكفي أنْ نثبت، من أجل كل x من D_f ، أنّ :
$\boxed{f(2\alpha-x)=f(x)}$ أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$.

9)نقطة الانعطاف:

بصفة عامّة، لتعيين نقطة الانعطاف، نقوم بما يلي:
نحسب المشتق الثاني $f''(x)$ ، و ندرس إشارته ، فإذا وجدنا $f''(x)$ انعدم عند قيمة x_0 من D_f ، مُغيّراً إشارته، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f.

حالة خاصّة: في بعض الحالات، يمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا انعدم المشتق الأوّل $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f ، ولمْ يغيّر إشارته ، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f.

حالة أخرى: إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ ؛ فالتفسير الهندسي هنا هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f.(فائدة: يكون المماس عند هذه النقطة موازيا لمحور التراتيب).

ملاحظة: في بعض الحالات، يَفرضُ علينا سياق التمرين أن نعيّن نقطة الانعطاف بالكيفيّة التالية :
يُطلب منّا أنْ ندرس وضعيّة المنحني C_f بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، فإذا وجدنا أنّ C_f غيّر وضعيّته بالنسبة إلى المماس(قبْل و بعْد نقطة التّماس) نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f.

10)تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل، نحلّ المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ حيث $x\in D_f$.(طبْعاً، إذا كانت قابلة للحل !)

11)تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب:

f دالة حيث $0\in D_f$ لتعيين نقطة تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب، نعوّض xبالصفر في عبارة $f(x)$. **(يتبع...)**

12)المماس:

هناك سِتُّ صِيَغ- تقريبا- لطرح سؤال المماس، لكنْ تبقى معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة على أيٍّ منها كما سنرى.

1/الصّيغة الأولى(العاديّة) : اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

الإجابة: نكتب الدستور: $y = f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$ حيث نُعوّض x_0 بقيمتها المعطاة.

2/الصّيغة الثانية: اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الترتيب y_0.

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$ ، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

3/الصّيغة الثالثة: بيّن أنّه يوجد مماس- أوْ أكثر- للمنحني C_f ميْله (أوْ معامل توجيهه) يساوي a .

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0)=a}$ ، وعند تعيين قيمة(أوْ قِيَم) x_0 نكون قد عُدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

ملاحظة: عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.

4/الصّيغة الرابعة: بيّن أنّه يوجد مماس- أوْ أكثر- للمنحني C_f يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax+b$.

الإجابة: نحل المعادلة $\boxed{f'(x_0)=a}$ (عُدنا إلى الحالة الثانية).

5/الصّيغة الخامسة:بيّن أنّه يوجد مماس-أوْ أكثر- للمنحني C_f يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax+b$.

الإجابة: نحل المعادلة $\boxed{a.f'(x_0)=-1}$.

6/الصّيغة السادسة:بيّن أنه يوجد مماس-أوْ أكثر- للمنحني C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيّيْ (α,β).

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{\beta = f'(x_0).(\alpha-x_0)+f(x_0)}$

عند تعيين قيمة (أوْ قِيَم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

13)النقطة الزّاويّة:

إذا كان:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2 .$$

حيث l_1 و l_2 عددان حقيقيّان $(l_1 \neq l_2)$ ، فالتفسير الهندسي هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0: نقطة زاويّة للمنحني C_f.

ملاحظة1: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1 \quad \text{وَ} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$$

ملاحظة2: معادلتا **نصفيْ المماسيْن** عند النقطة الزاويّة هما:

$$\begin{cases} y = f_d'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} y = f_g'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

عِلما أنّ : $f_g'(x_0)=l_1$ وَ $f_d'(x_0)=l_2$.

تـنـبـيـه: تبقى النقطة الزاويّة موجودة حتّى لو كانت إحدى النهايتيْن السابقتيْن عددا حقيقيّا l وَ الأخرى $+\infty$ أو $-\infty$.

14)استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعْد إنشاء C_f ، قد يُطلب منّا أنْ نستنتج منحنياً آخر C_h- مثلا- لدالة h ؛ و يكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي :

1/الصّيغة الأولى: استنتج C_h منحني h حيث: $h(x)=|f(x)|$

الإجابة: 1)على المجالات التي تكون فيها $f(x)\geq 0$ (أي يكون فيها C_f على محور الفواصل أو فوْقه) نحصل على $h(x)=f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f.

2) على المجالات التي تكون فيها $f(x)\prec 0$ (أي يكون فيها C_f تحت محور الفواصل) نحصل على $h(x)=-f(x)$ ، ومنه يكون C_h نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

2/الصّيغة الثانية: استنتج C_h منحني h حيث: $h(x)=f(|x|)$

ملاحظة: غالباً ما يُطلب منّا أوّلاً أنْ نثبت أنّ h زوجيّة.

الإجابة:1)إذا كان $x\geq 0$ و $x\in D_f$ (الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x)=f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f.

2)نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ h زوجيّة.

3/الصّيغة الثالثة: استنتج C_h منحني h حيث: $h(x)=f(-|x|)$

ملاحظة: غالباً ما يُطلب منّا أوّلاً أنْ نثبت أنّ h زوجيّة.

الإجابة:1)إذا كان $x\leq 0$ و $x\in D_f$ (الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x)=f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f.

2)نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ h زوجيّة.

4/الصّيغة الرابعة: استنتج C_h منحني h حيث: $h(x)=-f(x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

5/الصّيغة الخامسة:استنتج C_h منحني h حيث: $h(x)=f(-x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور التراتيب.

6/الصّيغة السادسة: استنتج C_h منحني الدالة h التي تحقق : $h(x)=-f(-x)$.

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

7/الصّيغة السابعة: استنتج C_h منحني الدالة h التي تحقق : $h(x)=f(x+a)+b$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيّان

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}-a\\+b\end{pmatrix}$.

8/الصّيغة الثامنة: استنتج C_h منحني الدالة h التي تحقق : $h(x)=k.f(x)$ ؛ $k\in\mathbb{R}^*$.

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالتآلف $A(x'x,y'y,k)$.

ملاحظة: هذه أبرز الحالات ، وغيرها شبيه بها أو يعود إليها.

(يـتبـع...)

I.نتائج ، خواص و تطبيقات:

1.نتائج:

في كلّ ما يلي ، يرمز a إلى عدد حقيقي:

1. $\ln a$ مُعرّف) يعني $(a \succ 0)$ **2.** $(\ln a > 0)$ يعني $(a > 1)$

3. $(\ln a = 0)$ يعني $(a = 1)$ **4.** $(\ln a < 0)$ يعني $(0 < a < 1)$

5. $\ln e^{a} = a$ **6.** $e^{\ln a} = a$ ؛ $a \succ 0$ **7.** $\ln 1 = 0$ **8.** $\ln e = 1$

2.خواص:

في كلّ ما يلي ، يرمز a و b إلى عددين حقيقيّين موجبيْن تماما:

1. $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$ **2.** $\ln a \succ \ln b$ يعني $a \succ b$

3. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ **4.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

5. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$ **6.** $\ln(a^{n}) = n\ln a$ ؛ $n \in \mathbb{Q}$.

3.تطبيقات:

ت1: اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

1) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$ 2) $e^{1+\ln 2}$ 3) $e^{-2\ln 3}$ 4) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)^{2} - \ln^{2}\left(\dfrac{1}{e}\right)$

ت2: حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $2\ln x = \ln(x-4) + \ln(2x)$.

ت3: حل، في $\mathbb{R}$ ، المتراجحة $\ln x + \ln(4-x) \le \ln(2x-1) + \ln 3$

ت4: حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $(\ln x)^{2} + 2\ln x - 3 = 0$.

II.دراسة إشارة بعض العبارات:

في كلّ ما يلي ، ترمز a، b ، c ، α ، β إلى أعداد حقيقيّة.

1.دراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x + \beta) + b$ حيث $a.\alpha \neq 0$:

لدراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x + \beta) + b$ على **مجموعة تعريفها**، نبحث عن القيمة التي تعدمها ولتكن x_0 ،ثمّ نُحدّد إشارتها كما في الجدول التالي:

x		x_0	
$a.\ln(\alpha x + \beta) + b$	عكس إشارة $a\alpha$	0	نفس إشارة $a\alpha$

تطبيق:

ادرس إشارة كلٍّ من **1)** $\ln(x+2) - 1$ ؛ **2)** $\ln(-x+1) + 2$.

2.دراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^{2} + b\ln x + c$ حيث $a.b.c \neq 0$:

لدراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^{2} + b\ln x + c$ على $\mathbb{R}^{*+}$ ، نقوم بما يلي:

نضع $\ln x = X$ ، فتصبح العبارة $a.X^{2} + b.X + c$ ، ونعيّن قيم X التي تعدمها- إنْ وُجدت- ثمّ نستنتج قيم x التي تعدم العبارة ، و في الأخير، نشكل جدولا ندرس فيه إشارة العبارة،مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.

تطبيقات:

ت1: ادرس إشارة : **1)** $(\ln x)^{2} + 2\ln x - 3$ **2)** $(\ln x)^{2} - \ln x + 1$

ت2: حل، في $\mathbb{R}$ ، المتراجحة $(\ln x)^{2} + 2\ln x - 3 \succ 0$.

III.تحويل بعض عبارات الدوال:

1) $\ln\left(u(x)^{n}\right) = n.\ln(u(x))$ ، إذا كان n **فرديّا**.

2) $\ln\left(u(x)^{n}\right) = n.\ln|u(x)|$ ، إذا كان n **زوجيّا**.

IV.حساب النهايات :

1.النهايات الشهيرة:

1) $\boxed{\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \ln\alpha = +\infty}$

2) $\boxed{\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} = 0}$ $\leftarrow$ $\left(n \succ 0 \text{ ؛ } \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\ln\alpha}{\alpha^{n}} = 0\right)$

3) $\boxed{\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ >}} \ln\alpha = -\infty}$ $\leftarrow\downarrow$ $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{\alpha}{\ln\alpha} = +\infty$

4) $\boxed{\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ >}} \alpha\ln\alpha = 0}$ $\leftarrow$ $\left(n \succ 0 \text{ ؛ } \lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ >}} \alpha^{n}\ln\alpha = 0\right)$

5) $\boxed{\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1}$ $\leftarrow$ $\left(\lim\limits_{\alpha \to 1} \dfrac{\ln\alpha}{\alpha - 1} = 1\right)$

2.تطبيقات على النهايات:

ت1: ادرس ، في كل حالة ، نهاية الدالة f عند $+\infty$:

.1 $f(x) = x + 1 - \ln(x-2)$ .2 $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x+3}$

.3 $f(x) = x + 1 - \ln(x-2)^{2}$ .4 $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{1 - 3\ln x}$

ت2: احسب ، في كل حالة ، النهاية :

.1 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-x^{2} + 3x + 1)\ln x$ .2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

.3 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ .4 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

.5 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$ .6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

.7 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^{2})}{x}$ .8 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln|-4x+2| - \ln|2x-1|$

V.قانونا الاشتقاق:

*إذا كانت u دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I ، فإنّ : $\boxed{\left(\ln[u(x)]\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

*إذا كانت u دالة لا تنعدم و تقبل الاشتقاق على مجال I ، فإنّ : $\boxed{\left(\ln|u(x)|\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

تطبيقات:

ت1: f دالة معرّفة على $D_f =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ بِـ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ ؛ ادرس تغيّرات f .

ت2: f دالة معرّفة على $D_f =]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = (\ln x)^{2} + 2\ln x - 3$ ؛ ادرس تغيّرات f .

ت3: f دالة معرّفة على $D_f = \mathbb{R} - \{1;2\}$ بـ : $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ ؛ ادرس تغيّرات f .

من إعداد الأستاذ: محمّد جبال

في كل ما يأتي، نفرض أنّ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1)كيفيّة إثبات توازي أو عدم توازي شعاعيْن:

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ متوازيان يكفي أن نثبت أنّ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$.

ملاحظة1: إذا انعدمت α' أو β' أو γ' فلا تُكتب النسبة التي انعدم مقامها، وَ نشترط أن تنعدم المركّبة التي تقابل المركّبة المعدومة في الشعاع الآخر حتى نحافظ على توازي الشعاعيْن.

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ غيْر متوازييْن، يكفي أن نثبت أنّ التناسب $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ غير محقق ولوْ بعَدَم تساوي نسبتيْن منه.

ملاحظة2: يمكن أيضا أن نبيّن أنّ الشعاعيْن $\vec{u}$ وَ $\vec{u'}$ متوازيان بإثبات وجود عدد حقيقي t يحقق $\vec{u}=t\vec{u'}$.

☑.تطبيق: اذكر ما إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيْن أم لا مع التعليل:
أ) $\vec{u}(-1,3,2)$ ؛ $\vec{v}(2,-6,-4)$. ب) $\vec{u}(2,0,1)$ ؛ $\vec{v}(1;0;0,5)$.
جـ) $\vec{u}(2,1,-1)$ ؛ $\vec{v}(-6,3,-3)$. د) $\vec{u}(2,0,0)$ ؛ $\vec{v}(7,0,0)$.

2)كيفيّة إثبات استقاميّة أو عدم استقاميّة ثلاث نقط:

∗لإثبات أنّ النقط A، B، C في استقاميّة يكفي أن نثبت- مثلا- أنّ $\vec{AB}//\vec{AC}$.

∗لإثبات أنّ النقط A، B، C ليست في استقاميّة يكفي أن نثبت - مثلا- أنّ $\vec{AB}\not\parallel\vec{AC}$.

☑.تطبيق:اذكر، في كل حالة، ما إذا كانت النقط A، B، C في استقاميّة مع التعليل: أ) $A(1,1,0)$، $B(2,1,1)$، $C(-1,2,-1)$.
ب) $A(2,1,-1)$، $B(3,1,0)$، $C(4,1,1)$.

3)كيفيّة إثبات أنّ ثلاث نقط تعيّن مستويا:

∗لإثبات أنّ النقط A، B، C تعيّن مستويا يكفي أن نثبت أنّها ليست في استقاميّة أيْ أنّ $\vec{AB}\not\parallel\vec{AC}$ - مثلا- .

☑.تطبيق: تحقق أنّ النقط $A(1,1,-1)$، $B(0,1,2)$، $C(2,1,1)$ تعيّن مستويا.

4)كيفيّة إثبات تعامد أو عدم تعامد شعاعيْن:

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ متعامدان يكفي أن نثبت أنّ $\vec{u}\cdot\vec{u'}=0$ أيْ $\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'=0}$.

∗لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ غير متعامديْن يكفي أن نثبت أنّ $\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'\neq 0}$.

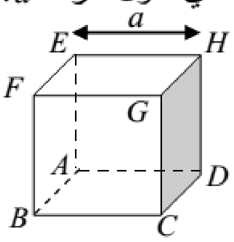
☑.تطبيق:هل الشّعاعان $\vec{u}(2,1,3)$ و $\vec{v}(0,3,-1)$ متعامدان؟

5)استخدام خاصّة الإسقاط لحساب الجداء السّلمي لشعاعيْن:

A، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P) لدينا : $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\vec{AB}\cdot\vec{AC'}$

حيث C' المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

☑.تطبيق: ليكن المكعب $ABCDEFGH$ الذي طول حرفه a.



1) احسب الجداء السّلمي $\vec{AB}\cdot\vec{GE}$.
2) احسب الجداء السّلمي $\vec{DB}\cdot\vec{GC}$.
3) نختار المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$.
ا-عيّن إحداثيّات كلّ رؤوس هذا المكعّب.
بـ-أجبْ الآن بطريقة تحليليّة عن السّؤاليْن1) و 2).

6)المعادلة الدّيكارتيّة لمستوٍ:

كلّ مستوٍ في الفضاء له معادلة ديكارتيّة من الشكل: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ حيث a، b، c ليست كلها معدومة. $\vec{n}(a;b;c)$ يسمّى شعاعا **ناظميّا** (عموديّا) على هذا المستوي.

✍.ملاحظة:لتعيين شعاع ناظمي للمستوي (P)،يكفي أنْ نعيّن شعاعا عموديّا على شعاعيْن غير متوازييْن من (P) .

7)كيفيّة تعيين معادلة ديكارتيّة لمستوٍ معيّن بثلاث نقط:

لتعيين معادلة ديكارتيّة للمستوي (P) المعيَّن بالنقط A، B، C نبحث عن شعاع ناظمي $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي (P) وذلك بحل الجملة التالية $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}$، و بعْد تعيين a، b، c تكون معادلة المستوي (P) من الشكل $ax+by+cz+d=0$، ثم يتمّ تعيين d بتعويض إحداثيّات إحدى النقط A، B، C في المعادلة.

☑.تطبيق:تحقق أنّ النقط $A(-1,0,1)$، $B(1,2,-1)$، $C(0,3,1)$ تعيّن مستويا ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتيّة لهذا المستوي.

☜**تنبيه هام :** إذا طُلِب منّا أنْ نبيّن أنّ النقط A، B، C تعيّن مستويا (P) معرّفا بمعادلته، فيكفي أنْ نبيّن أنّ إحداثيّات كلٍّ من هذه النقط تحقق معادلة المستوي (P).

☑.تطبيق: $A(1,1,0)$، $B(2,1,1)$، $C(-1,2,-1)$ ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.
بيّن أنّ معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$.

8)مستويات خاصّة:

☑ $z=0$. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$.
☑ $x=0$. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{j};\vec{k})$.
☑ $y=0$. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{i};\vec{k})$.

9)بُعْد نقطة عن مستوٍ:

بُعْد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ تُحسب بالدّستور التالي:

$$\boxed{d(M_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

☑.تطبيق:احسب بُعْد النقطة $A\left(2,-1,1\right)$ عن المستوي (P) ذي المعادلة $x-2y+2z+3=0$.

10) التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء:

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ و يوازي الشعاع $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ ، له تمثيل وسيطي من الشكل:

$$\boxed{(D):\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\ y=y_0+\beta t \quad ; t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+\gamma t\end{cases}}$$

($\vec{u}$ هو **شعاع توجيه** لـ (D))

☑.تطبيق: اكتب تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (AB) الذي يشمل النقطتيْن $A\left(1,1,-1\right)$ و $B\left(0,1,2\right)$.

11) بُعْد نقطة عن مستقيم:

لحساب بُعْد نقطة A عن مستقيم (D) ، نعيّن مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ، ويكون بُعْد A عن (D) هو الطول AH

☑.تطبيق: لتكن النقطة $A\left(2,1,-1\right)$ و ليكن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1-2t \quad ; t\in\mathbb{R}\\ z=2-t\end{cases}$.احسب بُعْد A عن (D)

12) سطح الكرة في الفضاء :

* معادلة سطح الكرة:

معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز $\omega(x_0,y_0,z_0)$ وَ نصف القطر R تُكتب كما يلي :

$$\boxed{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2}.$$

☑.تطبيقات:

ت1: جِدْ معادلة سطح الكرة ذات المركز $\omega(1,-2,0)$ و نصف القطر 3.

ت2: عيّن مركز و نصف قطر سطح الكرة المعيّن بالمعادلة المبسّطة التالية : $x^2+\left(y-2\right)^2+\left(z+1\right)^2=8$.

* المسألة العكسيّة:

لتكن (E): مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ من الفضاء حيث:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

لمعرفة طبيعة (E)، يمكن استعمال إحدى الطريقتيْن التاليتيْن:

1.**طريقة المميّز**: نحسب المميّز $k=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$.

I- إذا كان $k\prec 0$ ، فإنّ $(E)=\varnothing$.

II- إذا كان $k=0$ ، فإنّ $(E)=\left\{M\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)\right\}$.

III- إذا كان $k\succ 0$ ، فإنّ (E) هي سطح كرة مركزها $\omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)$ وَ نصف قطرها $R=\sqrt{k}$.

2.**طريقة إتمام المربّع**:

وهي طريقة معروفة تستخدم فيها المتطابقات الشهيرة.

ترجيح: إذا اشتملت المعادلة على وسيط ،يفَضَّل استخدام طريقة المميّز ،أمّا إذا لم تشتمل على ذلك فيبدو أنّ الطريقة الثانية أنسب.

☑.تطبيق: تعرّف على مجموعة النقط (E) من الفضاء و أعط عناصرها المميّزة في كلّ حالة :

أ) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$.

ب) $x^2+y^2+z^2+4x-2z+5=0$.

13) الوضعيّة النسبيّة لمستقيميْن في الفضاء :

ليكن المستقيم (D) الذي شعاع توجيهه $\vec{u}$ ، و المستقيم (D') الذي شعاع توجيهه $\vec{u'}$.

ا- إذا كان $\vec{u}\,//\,\vec{u'}$ فإنّ (D) و (D') متوازيان(إمّا **متوازيان و مختلفان** و إمّا **منطبقان**).

ب- إذا كان $\vec{u} \not\parallel \vec{u'}$ فإنّ (D) و (D') غير متوازييْن (إمّا **متقاطعان** و إمّا **من مستوييْن مختلفيْن**).

☜ملاحظة : في التطبيقات، نوضّح كيف يمكن التمييز بين هذه الحالات الأربع.

☑.تطبيق: ليكن المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) المعرّفة بتمثيلاتها الوسيطيّة التالية على الترتيب :

$$\begin{cases}x=-2+5t_1\\ y=-1-t_1 \quad ; t_1\in\mathbb{R}\\ z=3+4t_1\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x=1-t_2\\ y=4+3t_2 ; t_2\in\mathbb{R}\\ z=5-t_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t_3\\ y=1-3t_3 ; t_3\in\mathbb{R}\\ z=4+t_3\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x=2+2t_4\\ y=1-6t_4 ; t_4\in\mathbb{R}\\ z=6+2t_4\end{cases}$$

ادرس الوضعيّة النسبيّة لكلٍّ من (D_1) مع (D_2) ثم (D_1) مع (D_3) ثم (D_2) مع (D_3) و أخيرا (D_2) مع (D_4).

14) الوضعيّة النسبيّة لمستقيم مع مستوٍ في الفضاء :

نعتبر المستقيم (D) و المستوي (P) في الفضاء.

هناك ثلاث حالات محتملة :

ا-الحالة الأولى : (D)محتوى في (P).

ب- الحالة الثانية : (D) يوازي تماما (P)(تقاطعهما خالٍ).

جـ-الحالة الثالثة : (D) يقطع (P).

☜ملاحظة : في التطبيقات، نوضّح كيف يمكن التمييز بين هذه الحالات الثلاث.

☑.تطبيق: نعتبر المستقيم (D) ذا التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t ; t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$ والمستويات: $(P_1):2x+y-z-3=0$

$(P_2):-4x-2y+2z+1=0$ ؛ $(P_3):x-y+z-6=0$

ادرس الوضعيّة النسبيّة للمستقيم (D) مع كلٍّ من المستويات (P_1) (P_2) ثم (P_3).

15) الوضعيّة النسبيّة لمستوييْن في الفضاء :

نعتبر المستوييْن (P) و (P') المُعرّفيْن بمعادلتيْهما كما يلي :
$(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ؛ $(P): ax + by + cz + d = 0$

1/ إذا كان $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ فإنّ (P) و (P') **منطبقان**.

2/ إذا كان $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ فإنّ (P) و (P') **متوازيان تماما**

3/ إذا كان التناسب $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ غير محقق فإنّ (P) و (P') **متقاطعان**. في التطبيقات، نوضّح كيف نُعيّن مستقيم تقاطعهما.

☜ ملاحظة : في حالة انعدام a' أو b' أو c' أو d' (انظر الملاحظة1 في الفقرة 1 من الدليل).

☑ تطبيق: نعتبر المستويات :
$(P_2): -4x - 2y + 2z + 1 = 0$ ؛ $(P_1): 2x + y - z - 3 = 0$
$(P_4): -6x - 3y + 3z + 9 = 0$ ؛ $(P_3): x - y - 2z - 6 = 0$
ادرس الوضعيّة النسبيّة لكلٍّ من (P_1) مع (P_2) ثم (P_1) مع (P_3) ثم (P_1) مع (P_4).

16) تقاطع ثلاثة مستويات في الفضاء:

لدراسة تقاطع ثلاثة مستويات في الفضاء، يمكن أن ندرس تقاطع اثنين منهما، فإذا كانا متوازييْن تماما نستنتج أنّ تقاطع المستويات الثلاثة **خالٍ** ، أمّا إذا كانا متقاطعيْن فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن **تقاطع مستقيم مع مستو** .

☑ تطبيق: نعتبر المستويات :
$(P_2): 2x + y + 3 = 0$ ؛ $(P_1): 4x + y + z + 10 = 0$
$(P_3): x + y - z - 3 = 0$. عيّن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3)$.

17) تعامد مستوييْن في الفضاء:

يتعامد مستويان في الفضاء إذا تعامد شعاعاهما الناظميّان بمعنى إذا كان $(P): ax + by + cz + d = 0$
و كان $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ، فلدينا :

$$\boxed{aa' + bb' + cc' = 0 \text{ يعني } (P) \perp (P')}$$

18) تعامد مستقيميْن في الفضاء:

يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا تعامد شعاعا توجيههما.
بمعنى إذا كان $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)
و كان $\vec{u'}(\alpha', \beta', \gamma')$ شعاع توجيه للمستقيم (D')، فلدينا :

$$\boxed{\alpha.\alpha' + \beta.\beta' + \gamma.\gamma' = 0 \text{ يعني } (D) \perp (D')}$$

19) تعامد مستقيم و مستو في الفضاء:

يتعامد مستقيم و مستو في الفضاء إذا توازى شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناظمي لهذا المستوي.
بمعنى إذا كان $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)
و كان $\vec{n}(a, b, c)$ شعاعا ناظميّا للمستوي (P)، فلدينا :

$$\boxed{\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} \text{ يعني } (D) \perp (P)}$$

20) الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة مع مستو في الفضاء :

(S) سطح الكرة ذات المركز $\omega(x_0, y_0, z_0)$ ونصف القطر R
وَ (P) المستوي ذو المعادلة $ax + by + cz + d = 0$.
لتكن $d(\omega, P)$: بُعْد النقطة ω عن المستوي (P).

1) إذا كان $d(\omega, P) \succ R$ ، فإنّ $(S) \cap (P) = \varnothing$.
2) إذا كان $d(\omega, P) = R$ ، فإنّ $(S) \cap (P) = \{H\}$.
(المستوي (P) يمسّ سطح الكرة (S) في نقطة H).
3) إذا كان $d(\omega, P) \prec R$ ، فإنّ $(S) \cap (P) = C(I, r)$.
(المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها I و نصف قطرها r).

☜ كيفيّة تعيين العناصر المميّزة في الحالتيْن2) وَ3):

1. تُعيّن نقطة التّماس H في الحالة2) أو النقطة I: مركز دائرة التقاطع في الحالة3) على أساس أنّها نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم (ωH) أو المستقيم (ωI).

ملاحظة: نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (ωH) أو المستقيم (ωI) بناء على أنّ هذا المستقيم يشمل النقطة ω وَ يوازي الشعاع النّاظمي $\vec{n}$: للمستوي (P).

2. يُحسَب نصف القطر r لدائرة التقاطع بالقانون التّالي:

$$\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2}}$$

حيث يرمز R إلى نصف قطر سطح الكرة ،
و يرمز d إلى $d(\omega, P)$ أيْ بُعْد مركز سطح الكرة عن (P).

21) الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة مع مستقيم في الفضاء :

لدراسة الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة (S) مع مستقيم (D) في الفضاء، نعوّض x، y، z من التمثيل الوسيطي لِـ(D) في معادلة (S) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط،(وليكن t مثلا) :

1) إذا كان $\Delta \prec 0$ ، فإنّ $(S) \cap (D) = \varnothing$.
2) إذا كان $\Delta = 0$ ، فالمعادلة تقبل حلا مضاعفا $t_1 = t_2$ و بتعويض t بقيمة الحل المضاعف في التمثيل الوسيطي لِـ(D) نجد إحداثيّات نقطة التماس بيْن (S) و (D).
3) إذا كان $\Delta \succ 0$ ، فالمعادلة تقبل حلّيْن متمايزيْن t_1 و t_2 و بتعويض t_1 و t_2 في التمثيل الوسيطي لِـ(D)، نحصل على إحداثيّات نقطتيْ تقاطع (S) مع (D).

22) جيب تمام زاوية شعاعيّة :

إذا كان $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha', \beta', \gamma')$ شعاعيْن يختلفان عن $\vec{0}$ فإنّ

$$\boxed{\cos(\vec{u}, \vec{u'}) = \frac{\alpha.\alpha' + \beta.\beta' + \gamma.\gamma'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}}$$

.

23) مرجح نقطتيْن:

لتكن A و B نقطتيْن من الفضاء، و ليكن α و β عدديْن حقيقيّيْن حيث $\boxed{\alpha+\beta\neq 0}$ ، نقول إنّ النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ إذا كان $\boxed{\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=\vec{0}}$.

فكرة: لإنشاء المرجح H ، يمكن استخدام إحدى العلاقتيْن:

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BH}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

نتيجة هامّة: مهما كانت النقطة M من الفضاء ، فإنّ:

$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MH}}$.

***مركز ثقل نقطتيْن:**

إذا كان $\alpha=\beta$ ، نقول إنّ H هي مركز ثقل النقطتيْن A و B.

ملاحظة1: مركز ثقل نقطتيْن هو منتصفهما.

24) مرجح ثلاث نقط :

لتكن A، B، C ثلاث نقط من الفضاء، و لتكن α، β، γ أعدادا حقيقيّة حيث $\boxed{\alpha+\beta+\gamma\neq 0}$ ، نقول إنّ النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ إذا تحقق ما يلي :

$\boxed{\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}+\gamma\overrightarrow{HC}=0}$

فكرة: لإنشاء المرجح H ، يمكن- مثلا- استخدام العلاقة:

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

نتيجة هامّة1: مهما كانت النقطة M من الفضاء ، فإنّ:

$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MH}}$.

تنبيه : إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ ، فلا يوجد مرجح للنقط A، B، C بالمعاملات α، β، γ ؛ و يكون الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ شعاعا ثابتا (مستقلا عن M) ، و يتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة و استعمال علاقة *Chasles*.

نتيجة هامّة2: إذا كان H مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$،فمهما كانت النقطة M من الفضاء

$\boxed{\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MH^2+\alpha HA^2+\beta HB^2+\gamma HC^2}$

***إحداثيّات مرجح ثلاث نقط :**

إذا كان $A(x_A,y_A,z_A)$؛ $B(x_B,y_B,z_B)$؛ $C(x_C,y_C,z_C)$

فإنّ إحداثيّات المرجح H تحسب كما يلي :

$x=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ؛ $y=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$z=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

***مركز ثقل ثلاث نقط :**

نقول إنّ النقطة G هي مركز ثقل النقط A، B، C إذا كان:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

إحداثيّات مركز ثقل النقط A، B، C:

$x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$ ؛ $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$

$z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

25) مرجح أربع نقط أوْ أكثر :

يُعرَّف مرجح أربع نقط أوْ أكثر بنفس الكيفيّة التي عرِّف بها مرجح ثلاث نقط (انظر الفقرة24)).

26) المستوى المحوري :

H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء. المستوي المحوري للقطعة $[HH']$ هوالمستوي العمودي على $[HH']$ في منتصفها

27) مجموعات النقط في الفضاء :

نتيجة1: H نقطة من الفضاء وَ k عدد حقيقي موجب تماما مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\boxed{HM=k}$ هي :

$\boxed{\text{سطح الكرة ذات المركز } H \text{ وَ نصف القطر } k}$.

نتيجة2: H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\boxed{MH=MH'}$

هي : $\boxed{\text{المستوي المحوري للقطعة } [HH']}$.

نتيجة3: H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\boxed{\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}=0}$ هي:

$\boxed{\text{سطح الكرة ذات القطر } HH'}$.

نتيجة4: H نقطة من الفضاء وَ $\vec{U}$ شعاع ثابت غير $\vec{0}$.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\boxed{\overrightarrow{MH}.\vec{U}=0}$ هي:

$\boxed{\text{المستوي الذي يشمل النقطة } H \text{ وَ يعامد الشعاع } \vec{U}}$.

28) التمثيل الوسيطي لمستو في الفضاء:

في الفضاء، نعتبر النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و الشعاعيْن غير المتوازييْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$. التمثيل الوسيطي للمستوي (P) الذي يشمل A و يوازي $\vec{u}$ وَ $\vec{u'}$ يُعطى كالتّالي :

$$(P):\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha'\lambda \\ y=y_0+\beta t+\beta'\lambda \\ z=z_0+\gamma t+\gamma'\lambda \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R};\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

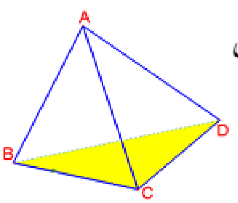
29) كيفيّة إثبات أنّ أربع نقط تنتمي إلى نفس المستوى:

لإثبات أنّ النقط A، B، C، D تنتمي إلى نفس المستوي نبيّن أنّ ثلاثة منها تشكل مستويا ، و أنّ الرابعة تنتمي إليه.

طريقة أخرى: نبيّن- مثلا- أنّه يوجد عددان حقيقيّان α و β بحيث $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

30) حجم رباعي وجوه :

يُحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التّالي: $\boxed{V=\dfrac{S\times h}{3}}$ حيث ترمز S إلى مساحة القاعدة و ترمز h إلى الارتفاع.



إعداد الأستاذ : محمد جبالي

دليل مختصر لتوظيف الأعداد المركبة في الهندسة (الصفحة الأولى)

إعداد الأستاذ : محمد جبالي
السنة الدراسية:2014/2013

في كل ما يلي، نفرض أنّ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$، ترمز z_A ، z_B ، z_C ، z_D إلى لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب.

I. معلومات أوّليّة:

✍. تمهيد:

1. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هي z_A. 2. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OB}$ هي z_B.

3. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

✍. التفسير الهندسي للطويلة:

1. $|z_A| = OA$ ، $|z_B| = OB$ ، $|z_B - z_A| = AB$.

2. $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{OA}{OB}$ ، حيث $B \neq O$.

3. $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ ، حيث $A \neq B$.

✍. تعريف العمدة و تفسيرها الهندسي:

1. $\arg(z_A) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ ، حيث $z_A \neq 0$.

2. $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})$ ، حيث $A \neq B$.

3. $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ، حيث $A \neq O$ و $B \neq O$.

4. $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ، حيث $A \neq B$ و $A \neq C$.

II. توظيف الأعداد المركبة في حلّ مسائل الهندسة:

✍. تداور النقط:

1. إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ ، نستنتج أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر r.

2. إذا كان $|z_A - z_\omega| = |z_B - z_\omega| = |z_C - z_\omega| = |z_D - z_\omega| = r$ نستنتج أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω و نصف القطر r.

✍. استقامية النقط:

1. إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$ ، حيث $A \neq B$

نستنتج أنّ النقط A ، B ، C على استقامية.

2. إذا كان : $\frac{z_B}{z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$ ، حيث $A \neq O$

نستنتج أنّ النقط O ، A ، B ، على استقامية.

✍. توازي شعاعين أو مستقيمين:

☑ إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}^*$ ، حيث $B \neq D$ و $A \neq C$

نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD} /\!/ \overrightarrow{AC}$ أو $(BD) /\!/ (AC)$.

التعليل: لأنّ العلاقة السابقة تكافئ $z_D - z_B = k(z_C - z_A)$

و هي تعني أنّ $\overrightarrow{BD} /\!/ \overrightarrow{AC}$.

✍. تعامد شعاعين أو مستقيمين:

1. إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy \quad ; y \in \mathbb{R}^*$ ، حيث $B \neq D$ و $A \neq C$

نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ أو $(BD) \perp (AC)$.

التعليل: لأنّ $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg(iy)$

و هذا يعني $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2. إذا كان: $\frac{z_B}{z_A} = iy \quad ; y \in \mathbb{R}^*$ ، حيث $A \neq O$ و $B \neq O$

نستنتج أنّ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ أو $(OA) \perp (OB)$.

التعليل: مثل التعليل السابق.

✍. طبيعة مثلث:

1. إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ ، حيث $A \neq C$ و $A \neq B$

فإنّ المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

التعليل:لأنّ $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |\pm i|$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(\pm i)$

أي : $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)

2. إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = iy \quad ; y \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}$ ، $A \neq C$ و $A \neq B$

فإنّ المثلث ABC قائم في A .

التعليل: لأنّ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(iy)$

أيّ : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (التفسير الهندسي للعمدة).

3. إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ ، حيث $A \neq C$ و $A \neq B$

فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع .

التعليل:لأنّ $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أي: $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)

4. إذا كان : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$

فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع .

التعليل: لأنّ $AB = AC = BC$ (التفسير الهندسي للطويلة).

5. إذا كان : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

فإنّ المثلث ABC متساوي الساقين.

التعليل: لأنّ $AB = AC$ (التفسير الهندسي للطويلة). (يتبع...)

III. توظيف الأعداد المركّبة في التحويلات النقطيّة:

✍. **كتابة الصّيَغ المركّبة للتحويلات النقطيّة:**

1. الانسحاب:

☑ الصيغة المركبة للانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}$ تكتب كما يلي : $\boxed{z'=z+z_{\vec{v}}}$ ؛ حيث يرمز $z_{\vec{v}}$ إلى لاحقة الشعاع $\vec{v}$.

2. التحويلات ذوات المركز:

☑ الصيغة المركبة للتحاكي ذي المركز ω و النسبة k تكتب $z'-z_\omega=k(z-z_\omega)$ أي $\boxed{z'=kz+(1-k)z_\omega}$

☑ الصيغة المركبة للتناظر الذي مركزه ω تكتب : $z'-z_\omega=-(z-z_\omega)$ أي $\boxed{z'=-z+2z_\omega}$

☑ الصيغة المركبة للدوران ذي المركز ω و الزاوية θ تكتب : $z'-z_\omega=e^{i\theta}(z-z_\omega)$ أي $\boxed{z'=e^{i\theta}z+(1-e^{i\theta})z_\omega}$

☑ الصيغة المركبة للتشابه المباشر ذي المركز ω و النسبة k و الزاوية θ تكتب : $z'-z_\omega=ke^{i\theta}(z-z_\omega)$ أي $\boxed{z'=ke^{i\theta}z+(1-ke^{i\theta})z_\omega}$

ملاحظة 1: لاحظ أنّ الصيَغ المركبة للتحويلات ذوات المركز لها نفس الشكل و هو $z'-z_\omega=\alpha(z-z_\omega)$ أي $\boxed{z'=\alpha z+(1-\alpha)z_\omega}$ و **إنما تختلف فيما بينها حسب** α.

ملاحظة 2: إذا كان **مركز التحويل هو** O **(أي مبدأ المعلم)** فإنّ الصيغة المركبة تأخذ شكلا أبسط و هو $\boxed{z'=\alpha z}$.

✍. **التعرّف على طبيعة تحويل مع عناصره المميّزة:**

f تحويل نقطي من المستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\alpha z+\beta$ ؛ $\alpha\neq 0$ و $\beta\in\mathbb{C}$.

1. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha=1}$ فإنّ f انسحاب لاحقة شعاعه β.
2. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha=-1}$ فإنّ f تناظر مركزي لاحقة مركزه $\frac{\beta}{2}$.
3. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha\in\mathbb{R}^*-\{1\}}$ فإنّ f تحاك نسبته α و لاحقة مركزه $z_\omega=\frac{\beta}{1-\alpha}$.
4. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha\notin\mathbb{R} \text{ و } |\alpha|=1}$ فإنّ f دوران زاويته $\arg\alpha$ و لاحقة مركزه $z_\omega=\frac{\beta}{1-\alpha}$.
5. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha\notin\mathbb{R} \text{ و } |\alpha|\neq 1}$ فإنّ f تشابه مباشر نسبته $|\alpha|$ و زاويته $\arg\alpha$ و لاحقة مركزه $z_\omega=\frac{\beta}{1-\alpha}$.

✍. **تعيين تحويل يحوّل نقطتين:**

A ، B ، A' ، B' أربع نقط متمايزة من المستوي.
لتعيين التحاكي أو الدوران أو التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى A' و يحوّل B إلى B'.
نحلّ جملة المعادلتين التاليتين : $\begin{cases} z_{A'}=\alpha z_A+\beta \\ z_{B'}=\alpha z_B+\beta \end{cases}$

فنجد α كما يلي $\boxed{\alpha=\frac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}}$ ، ثمّ نحسب β و ذلك بتعويض α بما يساويها في إحدى المعادلتين السّابقتين.
بعْد الحصول على α و β ، نعيّن العناصر المميّزة كما في الفقرة السابقة.

✍. **تعيين العناصر المميّزة لتحويل عُلم مركزه و يحوّل نقطة:**

A و A' نقطتان متمايزتان من المستوي.
لتعيين نسبة التحاكي أو زاوية الدوران أو نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه ω و يحوّل A إلى A'، نحسب α كما يلي $\boxed{\alpha=\frac{z_{A'}-z_\omega}{z_A-z_\omega}}$ و من ثمّ نعيّن العناصر المميّزة.

✍. **الاستنتاج من علاقة أنّ نقطة هي صورة أخرى بتحويل:**

ω ، A ، B ثلاث نقط متمايزة من المستوي.
إذا كان $\alpha=\frac{z_B-z_\omega}{z_A-z_\omega}$ ، فلدينا $z_B-z_\omega=\alpha(z_A-z_\omega)$
و هذا يعني أنّ B هي صورة A بالتحويل الذي مركزه ω. (تُعرَف طبيعة التحويل و عناصره المميّزة الأخرى من α).

✍. **تركيب التحويلات:**

1. مركب انسحابات: مركب عدّة انسحابات هو **انسحاب** شعاعه **مجموع أشعّتها**.
2. مركب تحاكيات لها نفس المركز: مركب عدّة تحاكيات لها نفس المركز هو **تحاك** له **نفس المركز** و نسبته **جداء النسب**.
3. مركب دورانات لها نفس المركز: مركب دورانات لها نفس المركز هو **دوران** له **نفس المركز** و زاويته **مجموع الزوايا**.
4. مركب تشابهات مباشرة لها نفس المركز: مركب تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو **تشبه مباشر له نفس المركز** و نسبته **جداء النسب** و زاويته **مجموع الزوايا**.
5. مركب تحويلات مختلفة المراكز أو من طبائع مختلفة:
إذا اختلفت مراكز التحويلات أو كانت من طبائع مختلفة ، فللتعرّف على طبيعة مركبها نستعمل صيغها المركبة و نتبع نفس الطريقة التي نستخدمها في تركيب الدوال العدديّة.

✍. **صورة شكل هندسي بتحويل:**

فيما يلي ، ترمز x و y إلى إحداثيتيْ نقطة M و ترمز x' و y' إلى إحداثيتيْ النقطة M' صورة M بتحويل ما.
لتعيين صورة شكل هندسي بهذا التحويل نتبع المراحل التالية
1) نحسب x و y بدلالة x' و y'.
2) نعوّض x و y بدلالة x' و y' في معادلة الشكل الهندسي، فنحصل على معادلة لصورة هذا الشكل.

III. توظيف الأعداد المركّبة في التحويلات النقطيّة:

✍. كتابة الصّيَغ المركّبة للتحويلات النقطيّة:

1. الانسحاب:

☑ الصيغة المركبة للانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}$ تكتب كما يلي : $\boxed{z' = z + z_{\vec{v}}}$ ؛ حيث يرمز $z_{\vec{v}}$ إلى لاحقة الشعاع $\vec{v}$.

2. التحويلات ذوات المركز:

☑ الصيغة المركبة للتحاكي ذي المركز ω و النسبة k تكتب $z' - z_{\omega} = k(z - z_{\omega})$ أي $\boxed{z' = kz + (1-k)z_{\omega}}$

☑ الصيغة المركبة للتناظر الذي مركزه ω تكتب : $z' - z_{\omega} = -(z - z_{\omega})$ أي $\boxed{z' = -z + 2z_{\omega}}$

☑ الصيغة المركبة للدوران ذي المركز ω و الزاوية θ تكتب : $z' - z_{\omega} = e^{i\theta}(z - z_{\omega})$ أي $\boxed{z' = e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta})z_{\omega}}$

☑ الصيغة المركبة للتشابه المباشر ذي المركز ω و النسبة k و الزاوية θ تكتب : $z' - z_{\omega} = ke^{i\theta}(z - z_{\omega})$
أي $\boxed{z' = ke^{i\theta}z + (1-ke^{i\theta})z_{\omega}}$

☜ ملاحظة 1: لاحظ أنّ الصّيَغ المركّبة للتحويلات ذوات المركز لها نفس الشكل و هو $z' - z_{\omega} = \alpha(z - z_{\omega})$
أي $\boxed{z' = \alpha z + (1-\alpha)z_{\omega}}$
و إنما **تختلف فيما بينها حسب** α.

☜ ملاحظة 2: إذا كان **مركز التحويل هو** O **(أي مبدأ المعلم)** فإنّ الصيغة المركبة تأخذ شكلا أبسط و هو $\boxed{z' = \alpha z}$.

✍. التعرّف على طبيعة تحويل مع عناصره المميّزة:

f تحويل نقطي من المستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \alpha z + \beta$ ؛ $\alpha \neq 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$.

1. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha = 1}$ فإنّ f انسحاب لاحقة شعاعه β.
2. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha = -1}$ فإنّ f تناظر مركزي لاحقة مركزه $\dfrac{\beta}{2}$.
3. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}}$ فإنّ f تحاك نسبته α و لاحقة مركزه $z_{\omega} = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.
4. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha \notin \mathbb{R} \text{ و } |\alpha| = 1}$ فإنّ f دوران زاويته $\arg\alpha$ و لاحقة مركزه $z_{\omega} = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.
5. $\boxed{\text{إذا كان } \alpha \notin \mathbb{R} \text{ و } |\alpha| \neq 1}$ فإنّ f تشابه مباشر نسبته $|\alpha|$ و زاويته $\arg\alpha$ و لاحقة مركزه $z_{\omega} = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

✍. تعيين تحويل يحوّل نقطتين:

A ، B ، A' ، B' أربع نقط متمايزة من المستوي.
لتعيين التحاكي أو الدوران أو التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى A' و يحوّل B إلى B'.
نحلّ جملة المعادلتيْن التّاليتيْن : $\begin{cases} z_{A'} = \alpha z_A + \beta \\ z_{B'} = \alpha z_B + \beta \end{cases}$

فنجد α كما يلي $\boxed{\alpha = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}}$ ، ثمّ نحسب β و ذلك بتعويض α بما يساويها في إحدى المعادلتيْن السّابقتيْن.
بعْد الحصول على α و β ، نعيّن العناصر المميّزة كما في الفقرة السّابقة.

✍. تعيين العناصر المميّزة لتحويل عُلم مركزه و يحوّل نقطة:

A و A' نقطتان متمايزتان من المستوي.
لتعيين نسبة التحاكي أو زاوية الدوران أو نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه ω و يحوّل A إلى A' ، نحسب α كما يلي $\boxed{\alpha = \dfrac{z_{A'} - z_{\omega}}{z_A - z_{\omega}}}$ و من ثمّ نعيّن العناصر المميّزة.

✍. الاستنتاج من علاقة أنّ نقطة هي صورة أخرى بتحويل:

ω ، A ، B ثلاث نقط متمايزة من المستوي.
إذا كان $\alpha = \dfrac{z_B - z_{\omega}}{z_A - z_{\omega}}$ ، فلدينا $z_B - z_{\omega} = \alpha(z_A - z_{\omega})$
و هذا يعني أنّ B هي صورة A بالتحويل الذي مركزه ω.
(تُعرف طبيعة التحويل و عناصره المميّزة الأخرى من α).

✍. تركيب التحويلات:

1. مركّب انسحابات: مركّب عدّة انسحابات هو **انسحاب** شعاعه **مجموع أشعّتها**.
2. مركّب تحاكيات لها نفس المركز: مركّب عدّة تحاكيات لها نفس المركز هو **تحاك** له **نفس المركز** و نسبته **جداء النّسب**.
3. مركّب دورانات لها نفس المركز: مركّب دورانات لها نفس المركز هو **دوران** له **نفس المركز** و زاويته **مجموع الزوايا**.
4. مركّب تشابهات مباشرة لها نفس المركز: مركّب تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو **تشبه مباشر** له **نفس المركز** و نسبته **جداء النّسب** و زاويته **مجموع الزوايا**.
5. مركّب تحويلات مختلفة المراكز أو من طبائع مختلفة:
إذا اختلفت مراكز التحويلات أو كانت من طبائع مختلفة ، فللتعرّف على طبيعة مركّبها نستعمل صيغها المركّبة و نتبع نفس الطريقة التي نستخدمها في تركيب الدوال العدديّة.

✍. صورة شكل هندسي بتحويل:

فيما يلي ، ترمز x و y إلى إحداثيّتيْ نقطة M و ترمز x' و y' إلى إحداثيّتيْ النقطة M' صورة M بتحويل ما.
لتعيين صورة شكل هندسي بهذا التحويل نتبع المراحل التالية
1) نحسب x و y بدلالة x' و y'.
2) نعوّض x و y بدلالة x' و y' في معادلة الشكل الهندسي، فنحصل على معادلة لصورة هذا الشكل.

في كل ما يلي، نفرض أنّ المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. ترمز z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D إلى لواحق النقط A ، B ، C ، D على التّرتيب.

I. معلومات أوّليّة:

✍. تمهيد:

1. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هي z_A. 2. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OB}$ هي z_B.
3. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

✍. التفسير الهندسي للطّويلة:

1. $|z_A| = OA$ ؛ $|z_B| = OB$ ؛ $|z_B - z_A| = AB$.
2. $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \dfrac{OA}{OB}$ ؛ حيث $B \neq O$.
3. $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$ ؛ حيث $A \neq B$.

✍. تعريف العمدة و تفسيرها الهندسي:

1. $\arg(z_A) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ ؛ حيث $z_A \neq 0$.
2. $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})$ ؛ حيث $A \neq B$.
3. $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ؛ حيث $A \neq O$ و $B \neq O$.
4. $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ؛ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$.

II. توظيف الأعداد المركّبة في حلّ مسائل الهندسة:

✍. تداور النقط:

1. إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ ، نستنتج أنّ النّقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدّائرة ذات المركز O و نصف القطر r.
2. إذا كان $|z_A - z_\omega| = |z_B - z_\omega| = |z_C - z_\omega| = |z_D - z_\omega| = r$ نستنتج أنّ النّقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدّائرة ذات المركز ω و نصف القطر r.

✍. استقاميّة النقط:

1. إذا كان : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$ ؛ حيث $A \neq B$

نستنتج أنّ النّقط A ، B ، C على استقاميّة.

2. إذا كان : $\dfrac{z_B}{z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$ ؛ حيث $A \neq O$

نستنتج أنّ النّقط O ، A ، B ، على استقاميّة.

✍. توازي شعاعيْن أو مستقيميْن:

☑ إذا كان $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}^*$ ؛ حيث $B \neq D$ و $A \neq C$

نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$ أو $(BD)//(AC)$.

التعليل: لأنّ العلاقة السابقة تكافئ $z_D - z_B = k\,(z_C - z_A)$ وهي تعني أنّ $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$.

✍. تعامد شعاعيْن أو مستقيميْن:

1. إذا كان $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy \; ; y \in \mathbb{R}^*$ ؛ حيث $B \neq D$ و $A \neq C$

نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ أو $(BD) \perp (AC)$.

التعليل: لأنّ $\arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg(iy)$

و هذا يعني $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2. إذا كان: $\dfrac{z_B}{z_A} = iy \quad ; y \in \mathbb{R}^*$ ؛ حيث $A \neq O$ و $B \neq O$

نستنتج أنّ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ أو $(OA) \perp (OB)$.

التعليل: مثل التّعليل السّابق.

✍. طبيعة مثلّث:

1. إذا كان : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ ؛ حيث $A \neq C$ و $A \neq B$

فإنّ المثلّث ABC قائم في A و متساوي السّاقيْن.

التعليل:لأنّ $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |\pm i|$ و $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(\pm i)$

أيْ : $\dfrac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)

2. إذا كان $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = iy \; ; y \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}$ ؛ $A \neq C$ و $A \neq B$

فإنّ المثلّث ABC قائم في A .

التعليل: لأنّ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(iy)$

أيْ : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ (التفسير الهندسي للعمدة).

3. إذا كان : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ ؛ حيث $A \neq C$ و $A \neq B$

فإنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع .

التعليل:لأنّ $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

أيْ : $\dfrac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)

4. إذا كان : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$

فإنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع .

التعليل: لأنّ $AB = AC = BC$ (التفسير الهندسي للطّويلة).

5. إذا كان : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

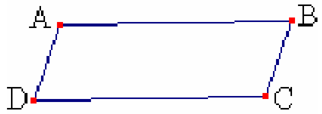
فإنّ المثلّث ABC متساوي السّاقيْن.

التعليل: لأنّ $AB = AC$ (التفسير الهندسي للطّويلة).

☜ملاحظة:

يمكن التّعرّف على طبيعة مثلّث دون اللجوء إلى الأعداد المركّبة ، و ذلك- مثلاً- بحساب أطوال أضلاعه ، فإنْ وجدْناها متساوية فهو متقايس الأضلاع ، و إنْ تساوى منها اثنان فقط كان متساوي السّاقيْن و تُستخدَم نظريّة فيطاغورس لمعرفة ما إذا كان قائما أيضا ، أمّا إذا اختلفت أطوال أضلاعه فيبقى لنا أنْ نستخدم نظريّة فيطاغورس فلربُما كان قائما.

✍. طبيعة رباعي:

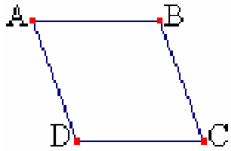


*متوازي الأضلاع:

لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع يكفي أنْ نثبت- مثلاً- أنّ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

أيْ أنّ: $\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D}$.

أوْ نثبت أنّ قطريْه متناصفان أي : $\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$.



*المُعيّن:

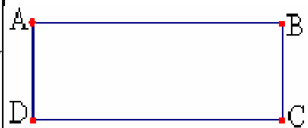
لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ معيّن يكفي أنْ نثبت أنّه متوازي أضلاع به ضلعان متعاقبان متقايسان أيْ

- مثلاً- أنّ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB=AD$

بمعنى : $\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D \text{ و } |z_B-z_A|=|z_D-z_A|}$

أوْ نثبت أنّ قطريْه متناصفان و متعامدان أيْ:

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ و $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ [هذا التّعامد يمكن إثباته باستعمال الجداء السّلمي أو الأعداد المركّبة(انظر الصفحة1)].



*المُستطيل:

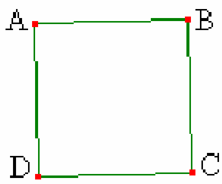
لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ مستطيل يكفي أنْ نثبت أنّه متوازي أضلاع به زاوية قائمة أيْ :

$\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D \text{ و } \overline{AB}\perp\overline{AD}}$

[التّعامد نثبته باستخدام الجداء السّلمي أو الأعداد المركّبة].

- يمكن أيضا لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ مستطيل أنْ نبيّن أنّ قطريْه متناصفان و متقايسان أيْ:

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ و $|z_C-z_A|=|z_D-z_B|$.



*المُربّع:

لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ مربّع يكفي أنْ نثبت أنّه معيّن به زاوية قائمة بمعنى آخر نبيّن أنّ :

$\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D \text{ و } |z_B-z_A|=|z_D-z_A| \text{ و } \overline{AB}\perp\overline{AD}}$

أو نثبت أنّ قطريْه متناصفان و متقايسان ومتعامدان أيْ:

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ و $|z_C-z_A|=|z_D-z_B|$ و $\overline{AB}\perp\overline{AD}$

أو نثبت أنّ كلّ أضلاعه متقايسة و به زاوية قائمة...إلخ.

☜ملاحظة:

كما أشرنا بالنسبة للمثلّثات ، تبقى الخيارات أمامنا كثيرة للتّعرّف على طبيعة أيّ رباعي ، فمثلاً لإثبات أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن كان يكفي أنْ نبيّن أنّ $AB=BC=CD=DA$ أيْ $|z_B-z_A|=|z_C-z_B|=|z_D-z_C|=|z_A-z_D|$.

✍. مجموعات النّقط:

I . A و B نقطتان متمايزتان و M نقطة لاحقتها z حيث $M\neq A$ و $M\neq B$.

1)مجموعة النّقط M من المستوي بحيث يكون $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ عددا حقيقيّا هي : $(AB)-\{A,B\}$.

2)مجموعة النّقط M من المستوي بحيث يكون $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ عددا حقيقيّا موجبا هي : $(AB)-[AB]$.

3)مجموعة النّقط M من المستوي بحيث يكون $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ عددا حقيقيّا سالبا هي : $[AB]-\{A,B\}$.

II. θعدد حقيقي و A نقطة حيث $(\overline{OI},\overline{OA})=\theta+2k\pi$

مجموعة النّقط M من المستوي بحيث: $\arg(z)=\theta+2k\pi$ هي : $[OA)-\{O\}$.

III. θعدد حقيقي و A و B نقطتان متمايزتان حيث : $(\overline{OI},\overline{AB})=\theta+2k\pi$.

مجموعة النّقط M حيث $\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$ هي : $[AB)-\{A\}$.

IV. G نقطة من المستوي وَ k عدد حقيقي موجب تماما مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $GM=k$ هي : الدّائرة ذات المركز G وَ نصف القطر k.

V. G وَ H نقطتان متمايزتان من المستوي.

1)مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MG=MH$ هي : محور القطعة $[GH]$.

2)مجموعة النقط M من المستوي حيث $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH}=0$ هي : الدائرة ذات القطر GH.

VI. G نقطة من المستوي وَ $\overline{U}$ شعاع ثابت غير $\vec{0}$.

مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\overline{U}=0$ هي : المستقيم الذي يشمل النقطة G وَ يعامد الشعاع $\overline{U}$.

✍. تحويل عبارتَيْ (لايْبنتز) الشّعاعيّة و العدديّة:

ليكن G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ ، لدينا :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

☜ملاحظة: في حالة مرجح أربع نقط أوْ أكثر، تُحوّل العبارتان بطريقة مماثلة .