ملخص دروس الرياضيات
من إنجاز الأستاذ رشيد ابن وهبون

الدوال العددية

1. مجموعة التعريف.

• **مجموعة تعريف دالة فيها كسر.**

$$D_{\frac{u}{v}}=\{x\in\mathbb{R}: v\neq 0\}$$

• **مجموعة تعريف دالة فيها جذر.**

$$D_{\sqrt{u}}=\{x\in\mathbb{R}: u\geq 0\}$$

• **مجموعة تعريف دالة فيها اللوغاريتم.**

$$D_{\ln(u)}=\{x\in\mathbb{R}: u>0\}$$

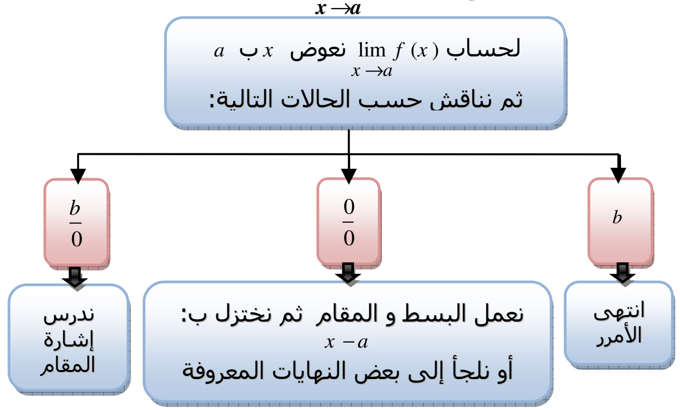
• **مجموعة تعريف دالة فيها tan.**

$$D_{\tan(u)}=\left\{x\in\mathbb{R}: u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$$

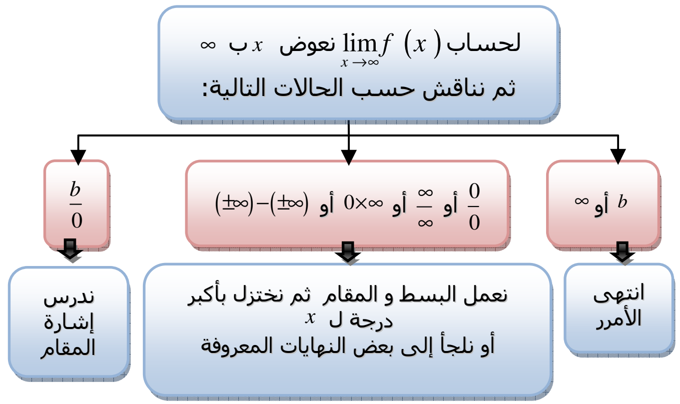
• **مجموعة تعريف باقي الدوال الغير مجزئة، هي:** $\mathbb{R}$

2. حساب النهايات.

• **حساب النهاية:** $\lim_{x\to a} f(x)$



• **حساب النهاية:** $\lim_{x\to\infty} f(x)$



3. اتصال دالة.

- f متصلة في النقطة a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- f متصلة على اليمين في النقطة a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.
- f متصلة على اليسار في النقطة a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.
- f متصلة على المجموعة A $\Leftrightarrow$ f متصلة في جميع نقط A .
- جميع الدوال الغير مجزئة، متصلة على مجموعة تعريفها.

4. صورة مجال بدالة متصلة.

f تزايدية	f تناقصية
$f([a,b])=[f(a),f(b)]$	$f([a,b])=[f(b),f(a)]$
$f([a,b[)=\left[f(a),\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f([a,b[)=\left]\lim_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$
$f(]a,b])=\left]\lim_{x\to a^+} f(x),f(b)\right]$	$f(]a,b])=\left[f(b),\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$f(]a,b[)=\left]\lim_{x\to a^+} f(x),\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f(]a,b[)=\left]\lim_{x\to b^-} f(x),\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$

5. مبرهنة القيم الوسيطية.

- إذا كانت f متصلة على المجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في المجال: $[a,b]$.
- إذا كانت f متصلة **و رتيبة قطعا** على المجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا **وحيدا** في المجال: $[a,b]$.

6. الدالة العكسية.

- إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث: $J=f(I)$.
- إذا كانت f تقبل دالة عكسية f^{-1} فإن:
  - ❖ $(\forall x\in J)(\forall y\in I): y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$
  - ❖ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متناظران بالنسبة للمحور $y=x$.
  - ❖ ل f و f^{-1} نفس الرتابة على كل من I و J على التوالي.

7. الاشتقاق

- f تقبل الاشتقاق في النقطة a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha\in\mathbb{R}$.
  و العدد α يسمى العدد المشتق ل f في a و نرمز له ب: $f'(a)$
- f تقبل الاشتقاق في النقطة a^+ $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha\in\mathbb{R}$
  و العدد α يسمى العدد المشتق ل f في a و نرمز له ب: $f'_d(a)$
- f تقبل الاشتقاق في النقطة a^- $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha\in\mathbb{R}$
  العدد α يسمى العدد المشتق ل f في a و نرمز له ب: $f'_g(a)$
- f قابلة للاشتقاق على المجموعة A $\Leftrightarrow$ f تقبل الاشتقاق في جميع نقط A .
- جميع الدوال، باستثناء الدوال المجزئة و الدوال اللاجذرية، قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

8. الخواص الجبرية للدوال اللوغريتمية و الدوال الأسية :

الدالة ln	الدالة exp
$\ln e=1$ و $\ln 1=0$	$e^1=e$ و $e^0=1$
ليكن a و b من $]0,+\infty[$ لدينا ★ $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. ★ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$. ★ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ ★ $\forall r\in\mathbb{Q}: \ln a^r=r\ln a$. ★ $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$. ★ $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$ ★ $\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.	ليكن a و b من $\Re$ لدينا : ★ $e^{a+b}=e^a\times e^b$. ★ $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$. ★ $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ ★ $\left(e^a\right)^b=e^{ab}$. ★ $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$ ★ $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$ ★ $\forall x\in\Re: e^x>0$.
★ $\forall x\in\Re: \ln\left(e^x\right)=x$	★ $\forall x\in]0,+\infty[: e^{\ln x}=x$
$\forall x\in\Re,\forall y\in]0,+\infty[: \ y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$.	

9. النهايات الأساسية:

نهايات الدالة ln	نهايات الدالة exp
★ $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$	★ $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
★ $\forall n\in\mathbb{N}^*: \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$	★ $\forall n\in\mathbb{N}: \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$
★ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$
★ $\forall n\in\mathbb{N}^*: \lim_{x\to 0^+} x^n\ln x=0^-$	★ $\forall n\in\mathbb{N}: \lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0$
★ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$	★ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

10.الدوال المشتقة :

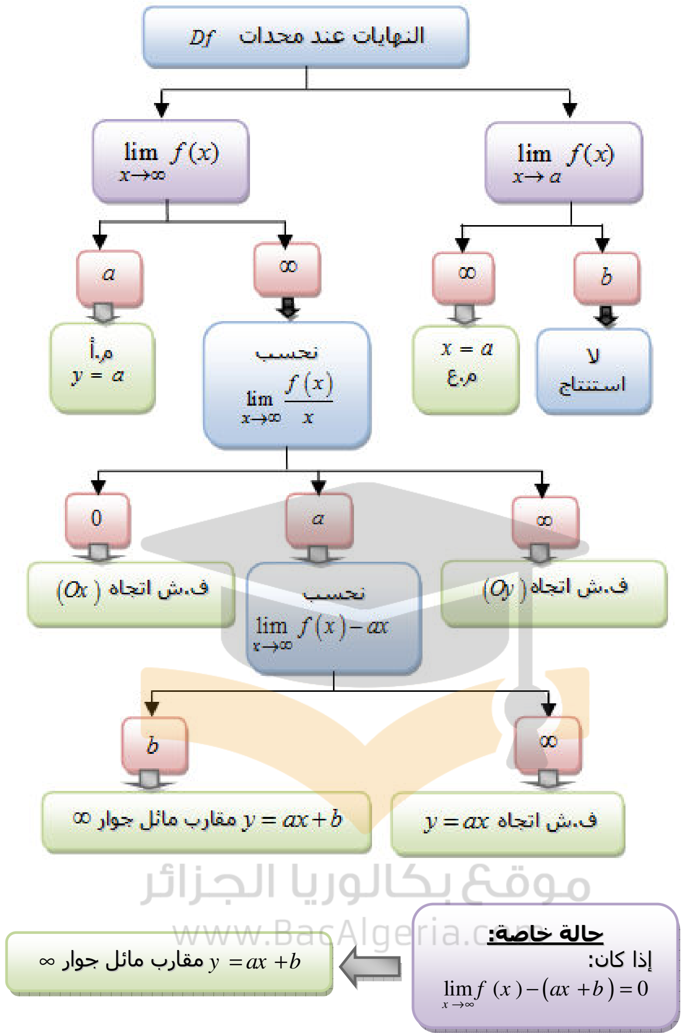
a. مشتقات الدوال الاعتيادية:

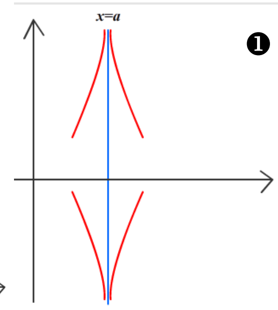
f	f'
k	0
ax	a
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$x^n \quad (n\geq 1)$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

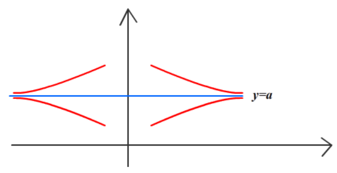
b. العمليات على الدوال المشتقة :

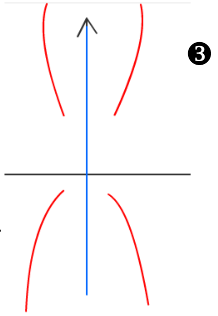
f	f'
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^r	$ru'u^{r-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

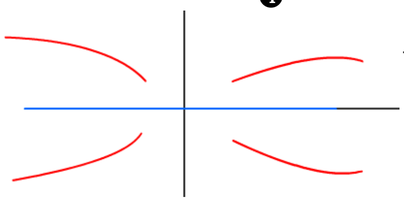
11.الفروع الانهائية :

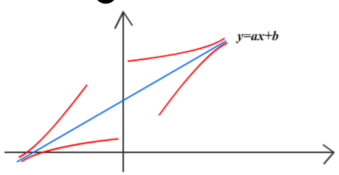


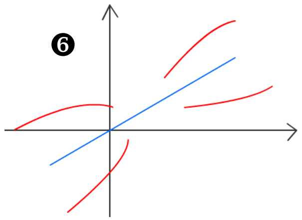
❶


❷


❸


❹


❺


❻


12.دراسة الوضع النسبي لمستقيم و تمثيل مبياني لدالة :

لدراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=ax+b$ و (C_f) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$.

- إذا كان : $f(x)-(ax+b)>0$ فإن : (C_f) فوق (Δ)
- إذا كان : $f(x)-(ax+b)<0$ فإن : (C_f) تحت (Δ)

13.دراسة تقاطع تمثيل مبياني لدالة و محور الأفاصيل:

لتحديد نقط تقاطع (C_f) و (Ox) نحل المعادلة $f(x)=0$.

14.محور تماثل و مركز تماثل (C_f) :

- النقطة $A(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) إذا وفقط إذا كان لكل $x\in Df$ لدينا $2a-x\in Df$ و $f(2a-x)=2b-f(x)$.
- المستقيم ذا المعادلة $y=a$ محور تماثل ل (C_f) إذا وفقط إذا كان لكل $x\in Df$ لدينا: $2a-x\in Df$ و $f(2a-x)=f(x)$.

إنشاء التمثيل المبياني لدالة

قبل البدأ في الإنشاء يجب استحضار ما يلي:

- جدول تغيرات الدالة.
- نتائج دراسة الفروع اللانهائية.
- نتائج دراسة الوضع النسبي للتمثيل المبياني مع المقاربات
- نتائج دراسة التقعر و التحدب و نقط الانعطاف (إن تمت التطرق لها في الأسئلة السابقة).

- نتائج دراسة تقاطع التمثيل المبياني مع محور الأفاصيل.
- نتائج دراسة الاشتقاق في نقطة.

ثم نبدأ الإنشاء حسب المراحل التالية:

1. ننشئ المقاربات إن وجدت.
2. ننشئ النقط المهمة و هي:
   - النقط التي انعدمت فيها المشتقة (و تتوفر على مماس موازي لمحور الأفاصيل).
   - النقط التي تمت دراسة الاشتقاق فيها مع مماساتها (إن تم ذلك).
   - نقط الانعطاف (إن وجدت).
   - نقط تقاطع التمثيل المبياني مع المحورين.
3. و في الأخير نمرر التمثيل المبياني للدالة مع استحضار رتابة الدالة حسب كل مجال و الوضع النسبي له مع المقاربات.

دراسة إشارة دالة

لدراسة إشارة الدالة $g(x)$ يمكن اتباع إحدى الطرق التالية:

❁ **الطريقة الأولى:** إذا كانت الدالة $g(x)$ جذاء أو خارج بعض العوامل التالية: $ax+b$ و ax^2+bx+c و $a\ln x+b$ و ae^x+b، نستعمل جداول الإشارة التالية:

- جدول إشارة الدالة التآلفية:

		$-b/a$	
$ax+b$	$-sign(a)$	0	$sign(a)$

- جدول إشارة ثلاثية الحدود:

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	$sign(a)$	0	$-sign(a)$	0	$sign(a)$

- جدول إشارة الدالة $x \mapsto a\ln x+b$:

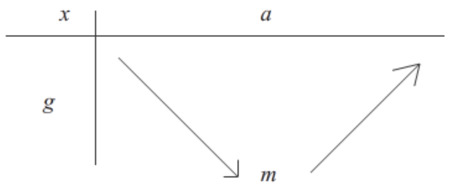
x		$e^{-b/a}$	
$a\ln x+b$	$-sign(a)$	0	$sign(a)$

- جدول إشارة الدالة $x \mapsto ae^x+b$ حيث $-\frac{b}{a}>0$:

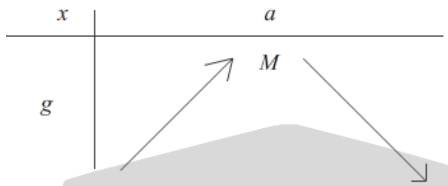
x		$\ln(-b/a)$	
ae^x+b	$-sign(a)$	0	$sign(a)$

❁ **الطريقة الثانية :** إذا تمت دراسة تغيرات الدالة $g(x)$ يمكن في بعض الحالات تحديد إشارتها إنطلاقا من جدول تغيراتها.

- إذا كان لـ g قيمة دنوية m موجبة فإن $g(x)\geq 0$:

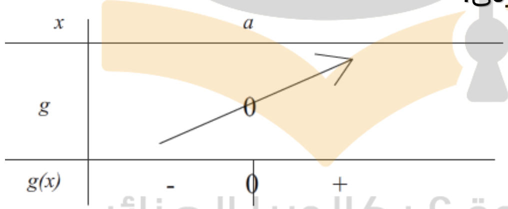


- إذا كان لـ g قيمة قصوية M سالبة فإن $g(x)\leq 0$:

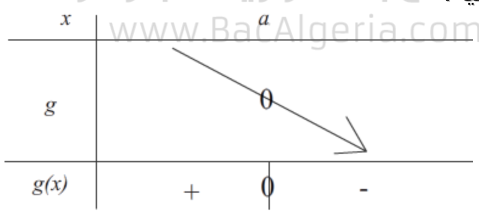


- إذا وجد عدد a حيث $g(a)=0$ يمكن استنتاج جدول إشارة $g(x)$ حسب الحالتين التاليتين:

❁ الحالة الأولى:



❁ الحالة الثانية:



❁ **الطريقة الثالثة :** تعتمد هذه الطريقة على حل إحدى المتراجحتين : $g(x)\geq 0$ أو $g(x)\leq 0$

❁ **الطريقة الرابعة :** و هي الطريقة المبيانية و التي تعتمد على (Cg) لتحديد إشارة $g(x)$. حيث أن :

- $g(x)\geq 0$ حينما يكون (Cg) فوق محور الأفاصيل.
- $g(x)\leq 0$ حينما يكون (Cg) تحت محور الأفاصيل.

المتتاليات العددية

2. المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
(U_n) م.حسابية $\Leftrightarrow U_{n+1}-U_n=r$	(U_n) م.هندسية $\Leftrightarrow U_{n+1}=qU_n$
إذا كانت (U_n) م.ح أساسها r فإن : • **حدها العام يكتب :** $U_n=nr+U_0$. • **المجموع:** $S_n=U_p+U_1+...+U_k=\frac{(k-p+1)(U_p+U_k)}{2}$	**إذا كانت (U_n) م.ه أساسها q فإن :** • **حدها العام يكتب :** $U_n=U_0q^n$ • **المجموع:** $S_n=U_p+U_1+...+U_k=U_p\left(\frac{1-q^{k-p+1}}{1-q}\right)$

3. تأطير متتالية.

إذا كان: $f(I)\subset I$ و $U_0\in I$ فإن: $\forall n\in\mathbb{N}:\ U_n\in I$

4. دراسة رتابة متتالية.

❁ ندرس إشارة الصيغة: $U_{n+1}-U_n$

- إذا كان : $U_{n+1}-U_n>0$ فإن : $(U_n)\nwarrow$
- إذا كان : $U_{n+1}-U_n<0$ فإن : $(U_n)\swarrow$

❁ في حالة ما تمت دراسة إشارة الصيغة: $f(x)-x$ نتبع الخطوات التالية:

- إذاكان: $f(x)-x\geq 0$ فإن: $U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n\geq 0$
- إذاكان: $f(x)-x\leq 0$ فإن: $U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n\leq 0$

5. حساب نهاية متتالية.

❁ **الطريقة الأولى:** إذا كانت المتتالية معرفة بحدها العام أي $U_n=f(n)$ فإن $\lim U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$.

❁ **الطريقة الثانية :** إذا كانت المتتالية ترجعية (أي تكتب على الشكل $(U_{n+1}=f(U_n))$ فإننا نلجأ لإحدى الطريقتين التاليتين: (حسب الأسئلة التمهيدية)

- توظيف خاصيات النهايات و الترتيب (طريقة **الشطابة** نموذجا).
- إذا كانت f متصلة على المجال I و $f(I)\subset I$ و $U_0\in I$ و (U_n) متقاربة فإن $\lim U_n$ هي حل للمعادلة $f(x)=x$ على المجال I.

حساب الكامل

1. جدول الدوال الأصلية:

f	F
0	k
a	ax
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
e^x	e^x
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

2. العمليات على الدوال الأصلية:

f	F
ku	kU
$u+v$	$U+V$
$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u

3. الخاصية الأساسية لحساب التكامل:

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$ لدينا :

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

4. علاقة شال: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

5. خطية التكامل:

$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.

6. المكاملة بالأجزاء:

$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

7. التكامل و الترتيب: إذا كان لدينا : $f \le g$ على المجال $[a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

8. حساب المساحة: مساحة الجزء المحدد ب C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=a$ و $x=b$ تكتب على الشكل: $A = \int_a^b |f(x)|dx$.

التعــــــداد

للتعامل مع أي وضعية تعدادية يمكن إتباع الخطوات التالية:

- **تنظيم المعلومات.** يمكن تنظيم معطيات الوضعية على شكل جدول أو أي شكل آخر يتيح سهولة استقراء المعلومات.
- **فهم الوضعية بدقة.** لفهم الوضعية التعدادية المطروحة يجب طرح الأسئلة التالية:
  - ما هو عدد العناصر المسحوبة؟
  - هل الترتيب مهم؟
  - هل عناصر السحبة تتكرر؟

للإجابة عن هذه الأسئلة يمكن إرجاع الوضعية المدروسة إلى نموذج السحب من الصندوق حسب الجدول التالي:

السحب تآنيا (معامل الترتيب غير مهم)	السحب بالتتابع (معامل الترتيب مهم)	
	بدون إحلال	بإحلال
التاليفات $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	الترتيبات بدون تكرار $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	الترتيبات بتكرار n^p

حساب الاحتمالات

1. خاصيات الاحتمالات:

- $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$
- $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- $\forall A\subset\Omega,\ 0\le P(A)\le 1$.
- $P(\Omega)=1$ و $P(\varnothing)=0$.
- $P(\bar{A}) = 1-P(A)$.
- A و B مستقلين $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

2. الاحتمال الشرطي:

احتمال وقوع الحدث B علما أن الحدث A قد وقع هو:

$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{Card(A\cap B)}{Card(A)}$

3. المتغير العشوائي:

- المتغير العشوائي X هو عبارة عن دالة تربط كل سحبة بعدد x_i.
- نرمز ب $X(\Omega)$ **لمجموعة قيم** المتغير العشوائي X
- نعبر عن **أحداث** المتغير العشوائي X بمعادلات و متراجحات مثل "$X=1$" و "$X\le 1$"
- **قانون احتمال** المتغير العشوائي X هو جميع الاحتمالات $P(X=x_i)$ للقيم التي يأخذها X.
- نعتبر قانون احتمال المتغير العشوائي X التالي:

x_i	x_1	x_2	...	x_k	
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_k	1

- **الأمل الرياضي** للمتغير العشوائي X هو العدد:
  $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_kx_k$
- **مغايرة** المتغير العشوائي X هو العدد:
  $V(X) = \left(p_1{x_1}^2 + p_2{x_2}^2 + \cdots + p_k{x_k}^2\right) - (E(X))^2$
- **الانحراف الطرازي** للمتغير العشوائي X هو العدد:
  $\sigma(X) = \sqrt{E(X)}$

4. القانون الحداني:

ليكن A حدث في تجربة عشوائية. عند تكرار التجربة n فإن احتمال ظهور الحدث A، k مرة هو: $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ حيث: $p=P(A)$

المعادلات التفاضلية

1. المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى.

- حلول المعادلة التفاضلية $(E):\ y' = ay+b$ يكتب على الشكل : $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

2. المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية.

لتحديد حلول المعادلة التفاضلية:: $(E):\ ay''+by'+cy=0$

حيث $a\neq 0$ نحل في $\Re$ المعادلة المميزة: $(C):\ ar^2+br+c=0$ ثم نحدد حلول (E) حسب الحالات التالية:

ليكن $\Delta=b^2-4ac$ مميز المعادلة (C) لدينا:

المميز	حلول (E)
$\Delta>0$	$y(x)=K_1e^{r_1x}+K_2e^{r_2x}$ حيث r_1 و r_2 حلي (C)
$\Delta=0$	$y(x)=(K_1x+K_2)e^{rx}$ حيث r الحل الوحيد ل (C)
$\Delta<0$	$y(x)=K_1\cos(\alpha x)+K_2\sin(\beta x)$ حيث $r=\alpha+i\beta$ و $\bar r=\alpha-i\beta$ الحلين المترافقين ل (C)

الأعداد العقدية

1. الشكل الجبري.

- يوجد عدد خيالي i حيث $i^2=-1$
- الكتابة: $z=a+ib$ مع $a,b\in\Re$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z.
- $z=a+ib \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=a\ et\ \mathrm{Im}(z)=b$
- $a+ib=0 \Leftrightarrow a=0\ et\ b=0$
- $a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'\ et\ b=b'$
- $z\in\Re \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$ و $z\in i\Re \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$
- $\frac{a+ib}{\alpha+i\beta}=\frac{(a+ib)(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2}$

2. مرافق عدد عقدي.

- $z=a+ib\Leftrightarrow \bar z=a-ib$
- $z=a+ib \Leftrightarrow z+\bar z=2a\ et\ z-\bar z=2ib$
- $z\in\Re \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$ و $z\in i\Re\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$
- $\overline{z+z'}=\bar z+\bar z'$ و $\overline{z\times z'}=\bar z\times\bar z'$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar z}{\bar z'}$ و $\overline{z^n}=(\bar z)^n$

3. معيار عدد عقدي.

- $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$
- $z\times\bar z=|z|^2=a^2+b^2$
- $|z+z'|\le|z|+|z'|$ و $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ و $|z^n|=|z|^n$ و $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$.

4. الشكل المثلثي لعدد عقدي.

★ **الشكل المثلثي.**

- $z=[r,\theta]=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
- $a+ib=[r,\theta]\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2}\\ a=r\cos\theta\\ b=r\sin\theta\end{cases}$
- $z=[r,\theta]\Rightarrow\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$.

★ **العمليات على الشكل المثلثي.**

- $[r,\theta]\times[r',\theta']=[r\times r',\theta+\theta']$ و $[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$.
- $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$.
- $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$ و $-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$ و $\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$.
- $\forall k\in\Re^+: k[r,\theta]=[kr,\theta]$ و $\forall k\in\Re^-: k[r,\theta]=[-kr,\pi+\theta]$

★ **الأشكال المثلثية الرئيسية.**

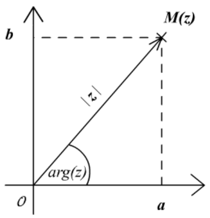
ش.ج	1	i	$1+i$	$1+\sqrt{3}i$	$\sqrt{3}+i$
ش.م	$[1,0]$	$\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$	$\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$

5. الشكل الأسي.

- $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=[1,\theta]$.
- $e^{i0}=1$ و $e^{i\pi}=-1$ و $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ و $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$.
- $(re^{i\theta})\times(r'e^{i\theta'})=r\times r'\times e^{i(\theta+\theta')}$ و $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}\times e^{i(\theta-\theta')}$ و
- $(re^{i\theta})^n=r^n\times e^{in\theta}$.
- $\overline{re^{i\theta}}=r\times e^{-i\theta}$ و $-re^{i\theta}=r\times e^{i(\pi+\theta)}$ و $\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}\times e^{-i\theta}$.
- صيغتي أولر: $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

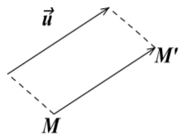
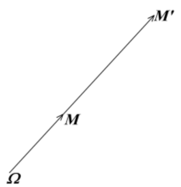
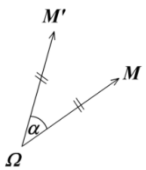
6. التمثيل الهندسي:

المفهوم الهندسي	تعبيره العقدة
النقطة $M(a,b)$	لحقها: $z_M=a+ib$
المسافة: AB	$\lvert z_B-z_A\rvert$
العلاقة المتجهية: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$	$z_B-z_A=k(z_D-z_C)$
الزاوية: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$	$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\Re$
ABC ق.ز في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\Re$
ABC م.س في A	$\left\lvert\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=1$
ABC م.س و ق.ز في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\pm\frac{\pi}{2}\right]$
ABC متساوي الأضلاع	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1,\pm\frac{\pi}{3}\right]$



7. الكتابة العقدية لبعض التحويلات الهندسية.

نعتبر النقطة $M(z)$ و $M'(z')$ صورتها بتحويل من التحويلات التالية:

التحويل	التعبيره الهندسي	التعبيره العقدي
الإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(a)$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ 	$z'-z=a$
التحاكي h ذا المركز $\Omega(\omega)$ و النسبة k	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ 	$z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$
الدوران ذا المركز $\Omega(\omega)$ و الزاوية α	$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\right)=\alpha[2\pi]\end{cases}$ 	$z'-z_\Omega=e^{i\alpha}(z-z_\Omega)$

8. المعادلات من الدرجة الثانية:

لحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):\ az^2+bz+c=0$، حيث $a,b,c\in\Re$، نتبع الخطوات التالية:

- نحسب مميز المعادلة: $\Delta=b^2-4ac$.
- ثم نناقش حسب الجدول التالي:

المميز	حلول (E)
$\Delta>0$	(E) تقبل حلين حقيقيين هما: $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	(E) تقبل حل حقيقي وحيد هو: $z=\frac{-b}{2a}$
$\Delta<0$	(E) تقبل حلين عقديين مترافقين هما:

$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	

- مجموع الجذرين و جذائهما هما:

$$z_1\times z_2=\frac{c}{a} \text{ و } z_1+z_2=\frac{-b}{a}$$

- لتكن p حدودية و z_0 عدد عقدي. إذا كان $P(z_0)=0$ فإن $P(z)$ تقبل القسمة الأقليدية على $z-z_0$. و لدينا:

$$P(z)=(z-z_0)Q(z)$$

الهندسة الفضائية

1. المستقيم في الفضاء.

تمثيل بارمتري للمستقيم (D) الموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$ و المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ يكتب على الشكل:

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\quad (t\in\Re).$$

2. معادلة ديكارتية لمستوى.

- معادلة للمستوى (P) المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ و $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية عليه تكتب على الشكل: $ax+by+cz+d=0$.
- إذا كان معرف بالمعادلة الديكارتية: $ax+by+cz+d=0$ فإن $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية عليه.

3. الجداء السلمي في الفضاء:

- الجداء السلمي ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- إذا كان $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

4. الجداء المتجهي.

- $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$.
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$.
- إذا كان $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ فإن $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$.
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين.
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow$ النقط A و B و C مستقيمية.
- نضع $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. إذا كانت $\vec{n}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C تكون مستوى (ABC) و $\vec{n}$ منظمية عليه.
- مساحة المثلث ABC هي: $S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

5. الوضع النسبي لمستقيم و مستوى.

لتكن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (D) و $\vec{n}$ منظمية على المستوى (P).

- $(D)\perp(P)\Leftrightarrow\vec{u}\wedge\vec{n}=\vec{0}$
- $(D)//(P)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{n}=0$.

6. الوضع النسبي لمستويين.

لتكن $\vec{n}$ منظمية على المستوى (P) و $\vec{n'}$ منظمية على المستوى (P').

- $(P)\perp(P')\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$
- $(P)//(P')\Leftrightarrow\vec{n}\wedge\vec{n'}=\vec{0}$.

7. مسافة نقطة عن مستوى:

نعتبر المستوى $(P):ax+by+cz+d=0$ و النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ لدينا:

$$d(A,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

8. مسافة نقطة عن مستقيم.

لدينا: $d(M,(D))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

9. معادلة فلكة.

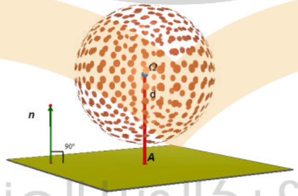
- معادلة الفلكة التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها R تكتب على الشكل: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
- مركز و شعاع الفلكة ذات المعادلة: $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\delta z+\varphi=0$ هما $\Omega\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{-\beta}{2},\frac{-\delta}{2}\right)$ و

$$R=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-\varphi}$$

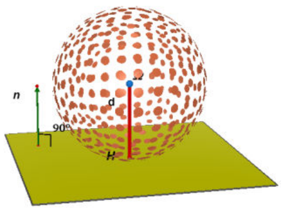
10. الوضع النسبي لمستوى و فلكة.

لتحديد الوضع النسبي بين المستوى (P) و الفلكة $S(\Omega,R)$ نحسب أولا المسافة: $d=d(\Omega,(P))$ ثم نقارنها مع الشعاع R.

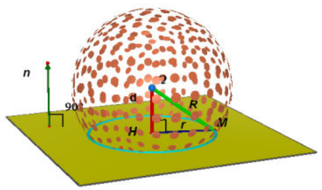
- إذا كان: $d>R$: فإن (P) لا يقطع (S).



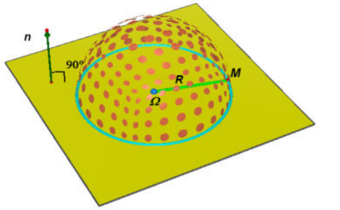
- إذا كان: $d=R$: فإن (P) مماس ل (S) في النقطة H المسقط العمودي ل Ω على (P).



- إذا كان: $d<R$: فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) مركزها H المسقط العمودي ل Ω على (P) و شعاعها: $r=\sqrt{R^2-d^2}$.



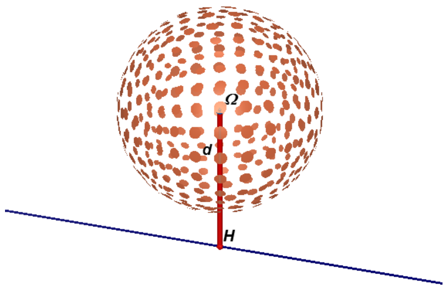
- إذا كان: $d=0$: فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة كبرى (C) مركزها Ω مركز الفلكة و شعاعها R الفلكة.



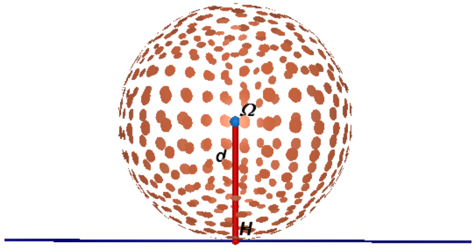
11. الوضع النسبي لمستوى و فلكة.

لتحديد الوضع النسبي بين المستقيم (D) و الفلكة $S(\Omega,R)$ نحسب أولا المسافة: $d=d(\Omega,(D))$ ثم نقارنها مع الشعاع R.

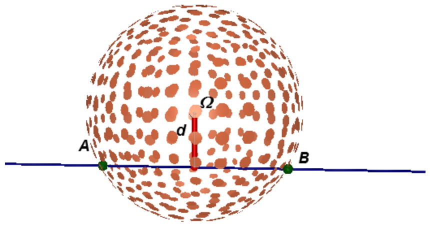
- إذا كان: $d>R$: فإن (D) لا يقطع (S).



- إذا كان: $d=R$: فإن (D) مماس ل (S) في النقطة.



- إذا كان: $d<R$: فإن (D) يخترق (S) في نقطتين.



12. مستوى مماس لفلكة.

- (P) مماس للفلكة $S(\Omega,R)\Leftrightarrow d(\Omega,(P))=R$.
- (P) مماس للفلكة $S(\Omega,R)$ في النقطة $A\Leftrightarrow\begin{cases}A\in(P)\cap(S)\\ \overrightarrow{A\Omega}\perp(P)\end{cases}$.